

從數學知識結構談到STEM

馮振業
香港教育大學數學與資訊科技學系
2017年6月26日

經典重溫

Bruner, J. (1977). *The process of education*.
Cambridge, MA: Harvard University Press.

邵瑞珍譯（1995）。《教育的歷程》。臺北：五南。

Chapter 2 The Importance of Structure
第二章 結構的重要性

Learning should not only take us somewhere; it should allow us later to go further more easily. There are two ways in which learning serves the future. One is through its **specific applicability to tasks that are highly similar to those we originally learned to perform**. Psychologists refer to this phenomenon as specific transfer of training; perhaps it should be called the extension of habits or associations. Its utility appears to be limited in the main to what we usually speak of as skills. (p.17)

學習不但應該把我們帶往某處，而且還應該讓我們日後再繼續前進時更為容易。學習為將來服務有兩種方式。一種方式是透過它對**某些工作（這些工作與原先所學的工作十分相似）**的特定適應性。心理學家把這種現象稱為訓練的特殊遷移；也許應該把這種現象稱為習慣或聯想的延伸。它的效用好像大體上限於我們通常所講的技能。（頁15）

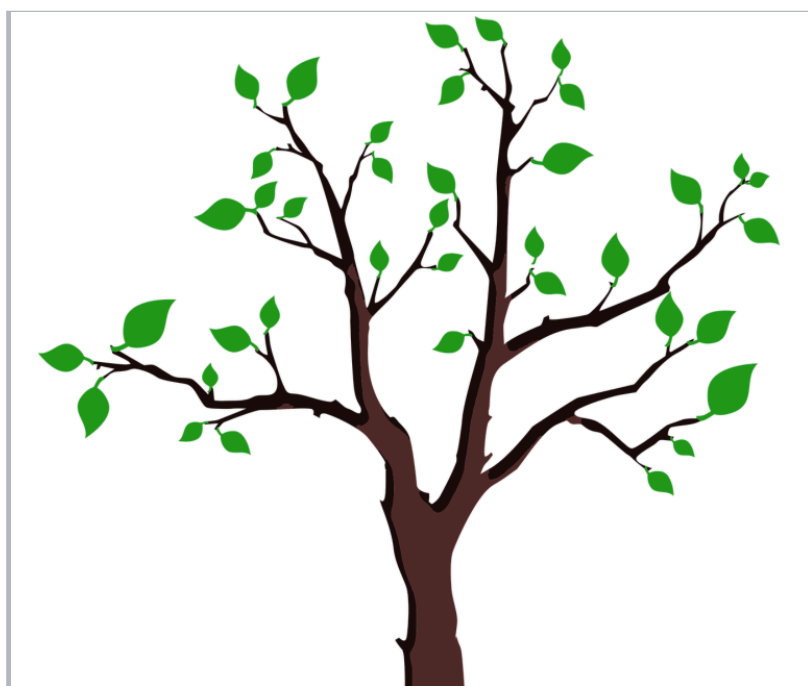
A second way in which earlier learning renders later performance more efficient is through what is conveniently called nonspecific transfer or, more accurately, the transfer of principles and attitudes. In essence, it consists of learning initially not a skill but a general idea, which can then be used as a basis for recognizing subsequent problems as special cases of the idea originally mastered. This type of transfer is at the heart of the educational process—the continual broadening and deepening of knowledge in terms of basic and general ideas. (p.17)

先前學習使日後工作更為有效的第二種方式，則是透過所謂**非特殊遷移**，或者，說得更確切些，**原理和態度的遷移**。這種遷移，從本質上說，一開始不是學習一種技能，而是學習一個一般觀念，然後這個一般觀念可以當成認識後繼問題的基礎，這些後繼問題是開始所掌握的觀念的特例。這種類型的遷移應該是教育過程的核心——用基本的和一般的觀念來不斷擴大和加深知識。（頁15-16）

The continuity of learning that is produced by the second type of transfer, transfer of principles, is dependent upon **mastery of the structure of the subject matter**...in order for a person to be able to recognize the applicability or inapplicability of an idea to a new situation and to broaden his learning thereby, he must have clearly in mind the general nature of the phenomenon with which he is dealing. **The more fundamental or basic is the idea he has learned, almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems.** (p.18)

由第二種類型的遷移即原理的遷移所產生的學習連讀性，有賴於**掌握...教材的結構**。...一個人為了能夠認識某一觀念對新情境的適用性或不適用性，從而增廣他的學識，他對他所研究的對象的一般性質，必須心中有數。他學到的觀念越是基本，幾乎歸結為定義，則這些觀念對新問題的適用性就越寬廣。（頁16）

看到的是...



想一想

過去20年香港的課程與教學，
有重視學科知識結構嗎？

理順知識結構…

- 可以加強學習活動之間的聯繫，令學與教更具方向感。
- 有助描繪和討論學習進程和成就。
- 令學生更容易掌握創造知識的軌道和通則，從而建立自信。

示例

- 數數
- 辨認圖形
- 位值
- 乘法
- 貨幣
- 量度與推算
- 數據展示與解讀

數是甚麼？

- 是一個數學概念，來自抽取事物的共性，是思維產物，不存在於現實世界。
- 它的作用在於把事物量化。
- 每個數都有一個名稱，也有專用的符號。
- 每個數都有清楚的定義。

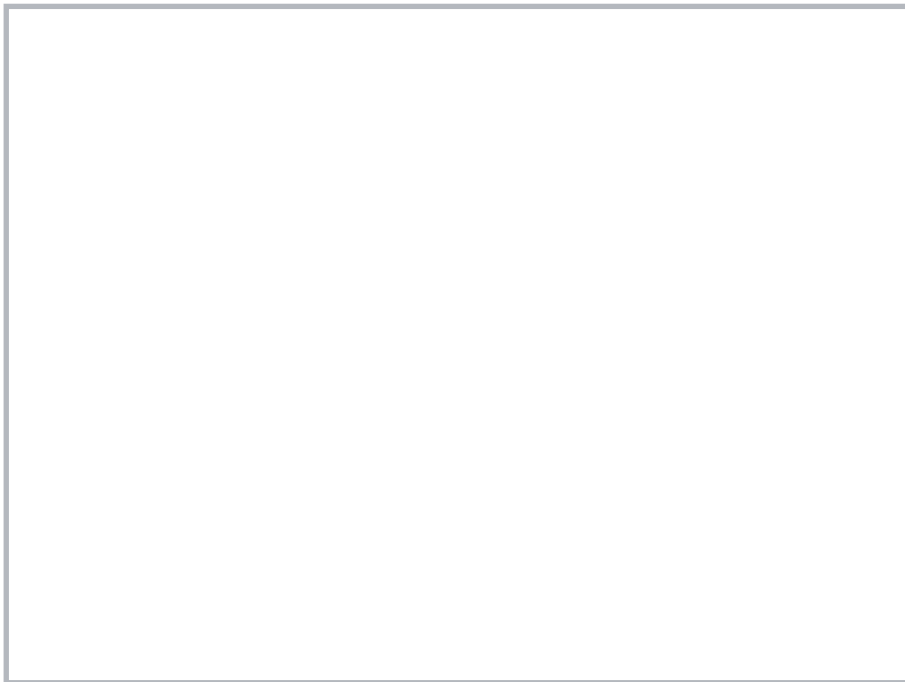
數數行為

與這兒一樣多的數量記作



讀作 

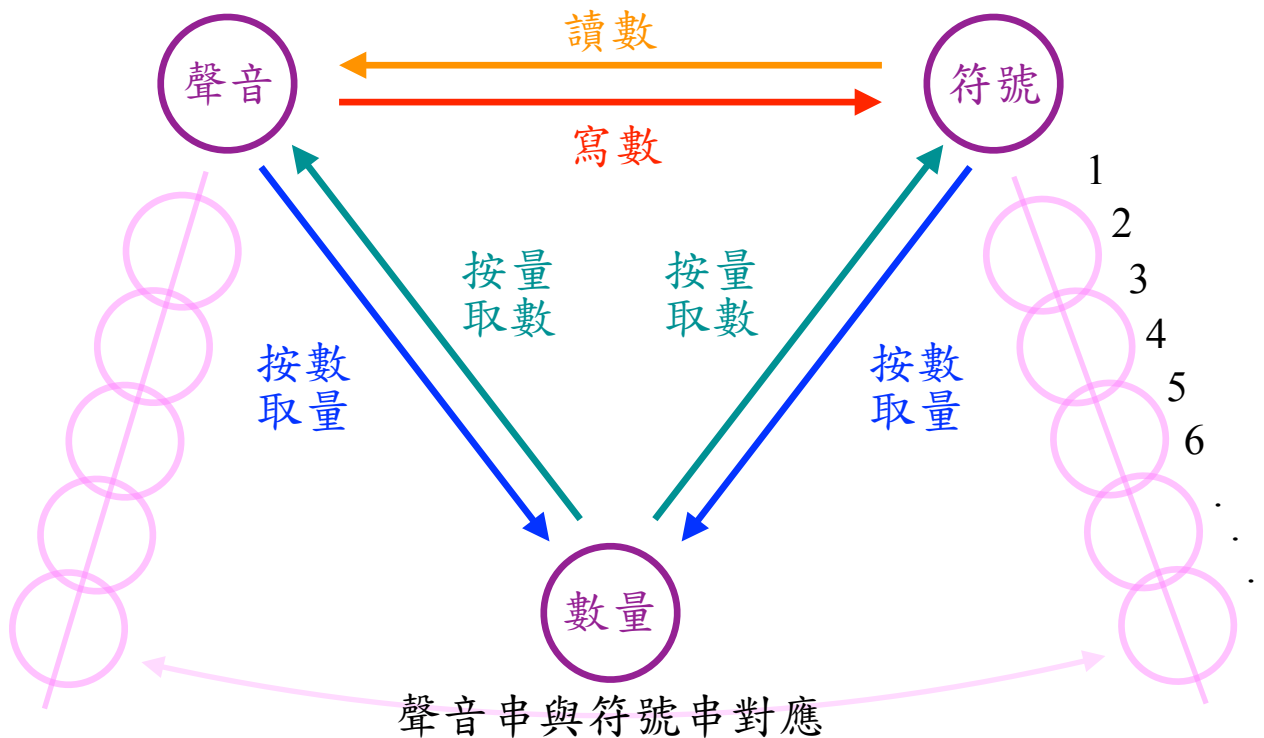
怎樣知道一堆物件有多少？



數數的意義

藉聲音串（聽覺）或其他方法（視覺或觸覺）
找出一堆物件的數量

數數涉及的技能



努力試課程訓練中心

<http://www.lp.org.hk>

設計的《數數書》，以低斜度進程綜合地處理了數數行為的各個部分

辨認圖形

- 對一個系列的圖形，給予一個名稱。
- 系列內的圖形有著某種共通點，而這共通點往往不便於初始接觸時交代清楚。

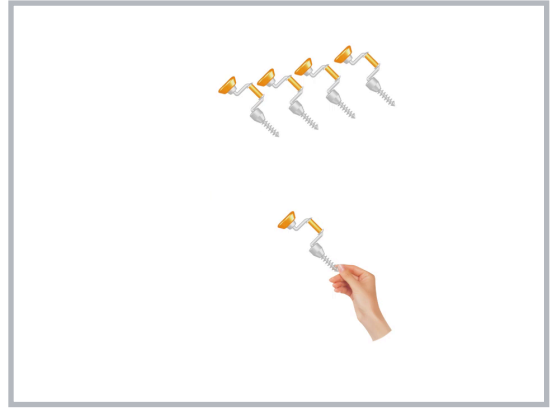
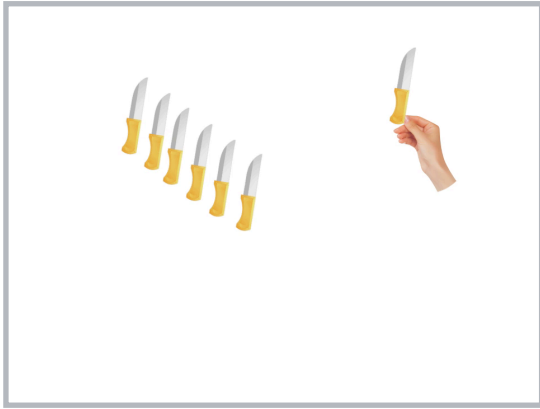
知識結構

- 先要掌握「同類」是甚麼意思。
- 要確認「同類」，需要意識到有相同的地方。
- 在不直接交代共通點的前提下，必須佈置情境，讓學生「意會」共通點。

藉「找不同」意會共通點

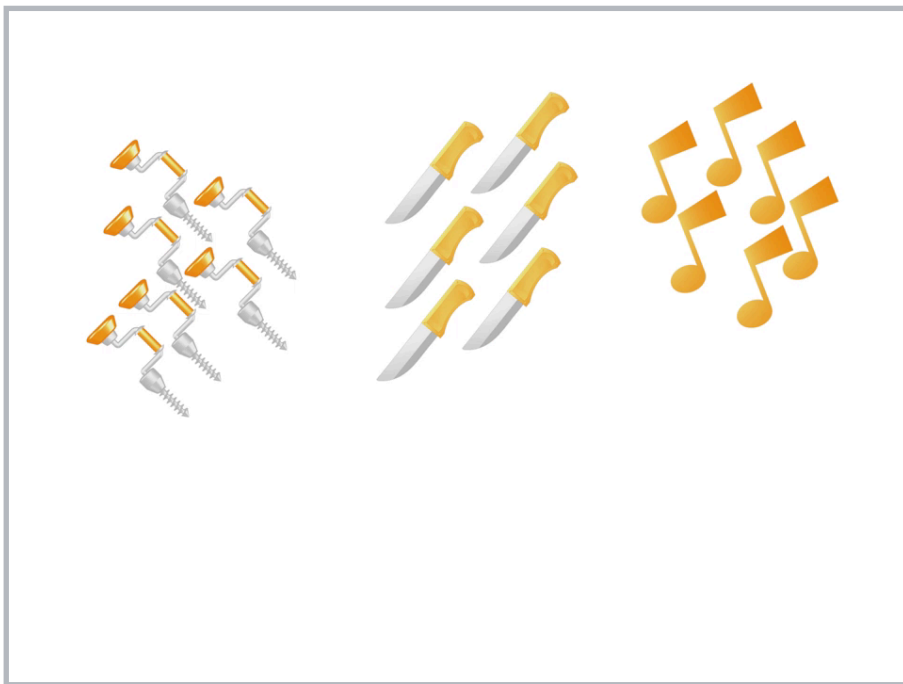
- 前期準備（上）：把「同類」的放在一起。
- 前期準備（下）：找出「同類」，放在一起。

前期準備（上）



把「同類」的放在一起

前期準備（下）



找出「同類」，放在一起

藉「找不同」意會共通點

在下列條件下找出不同的一項：

- 第一步：放四至五個選擇，其一是焦點概念，其餘是完全相同的非焦點概念。
- 第二步：放四至五個選擇，其一是非焦點概念，其餘是完全相同的焦點概念。

每步要進行大量練習，當中包括焦點概念和非焦點概念的各種可能變化。

藉「找不同」意會共通點

在下列條件下找出不同的一項：

- 第三步：放四至五個選擇，其一是非焦點概念，其餘是不完全相同的焦點概念。

經大量練習之後，介紹焦點概念的名稱（X），而非焦點概念都統稱為「不是X」。

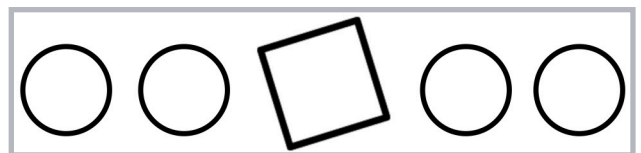
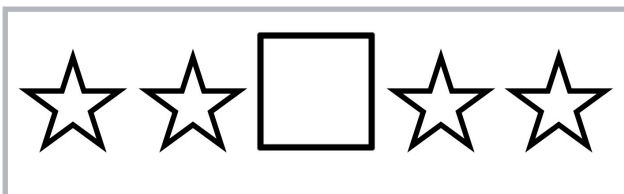
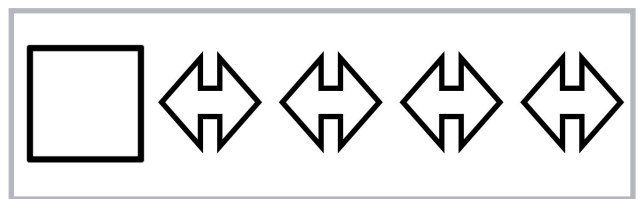
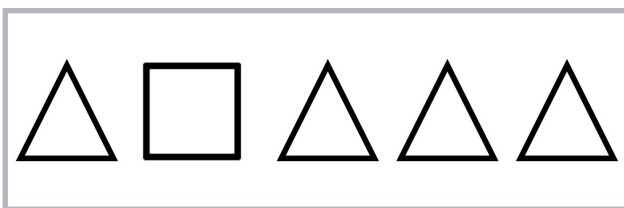
藉「找不同」意會共通點

在下列條件下找出焦點概念 (X)：

- 第四步：放四至五個選擇，其一是焦點概念，其餘是不完全相同的非焦點概念。

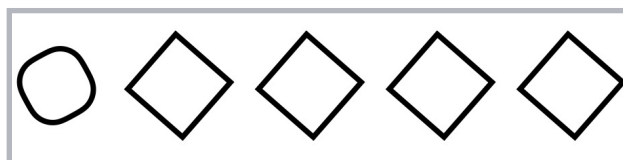
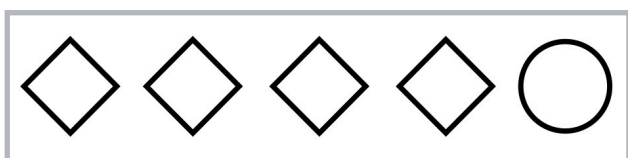
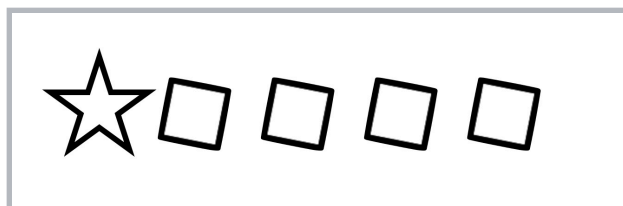
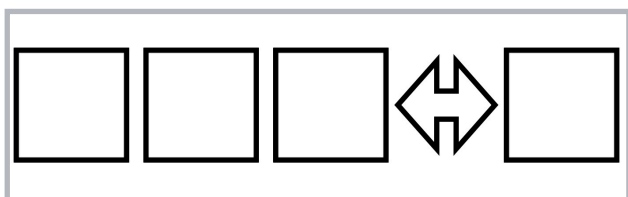
示例：正方形

找不同第一步



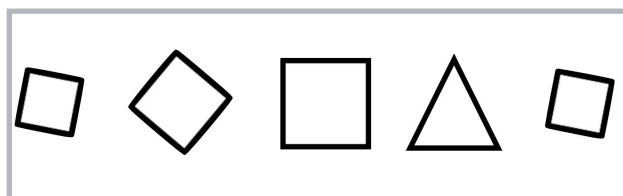
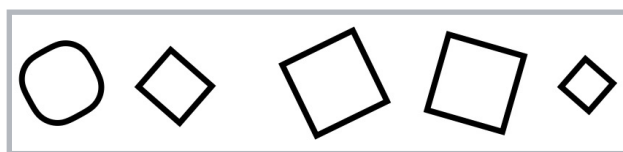
示例：正方形

找不同第二步



示例：正方形

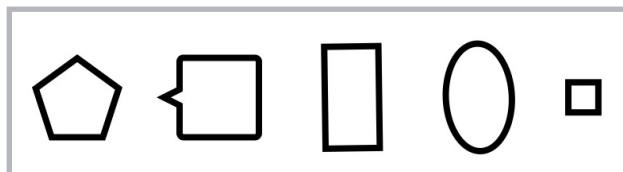
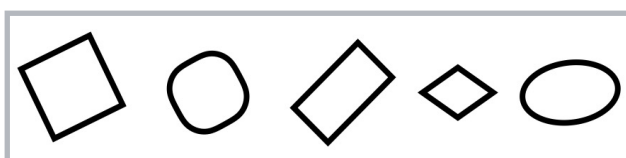
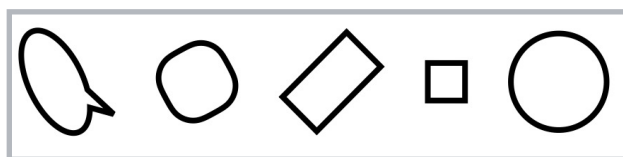
找不同第三步



經大量練習之後，介紹焦點概念「正方形」，其他的都「不是正方形」。

示例：正方形

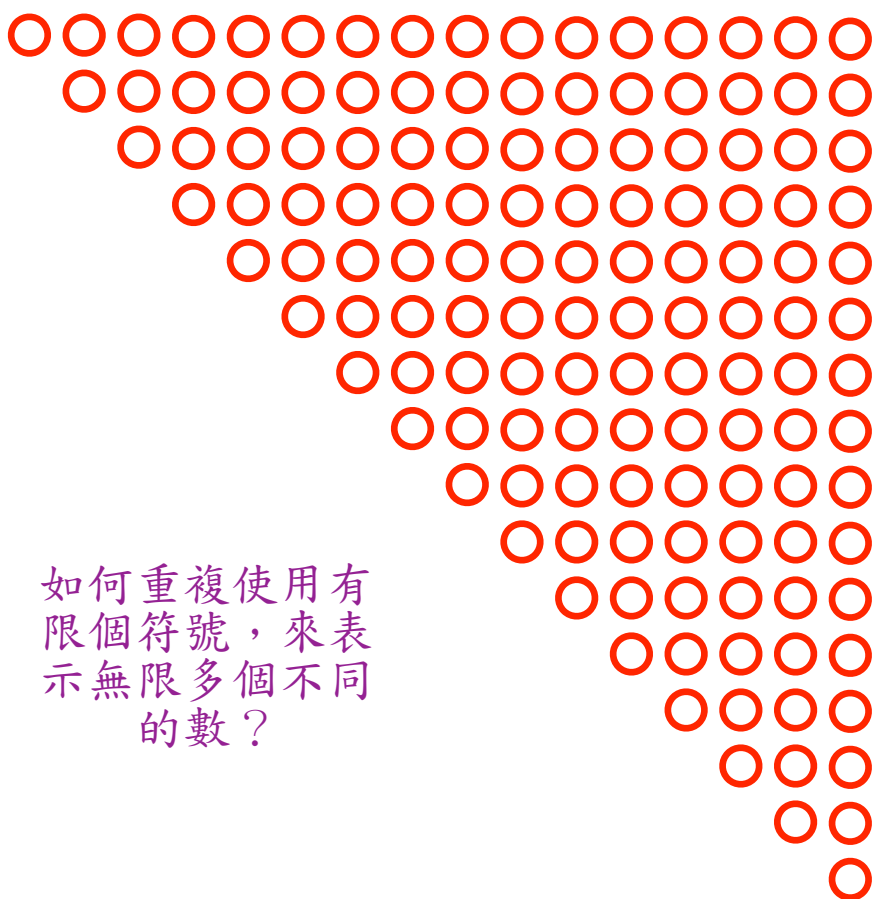
找不同第四步：找出正方形



重施故伎

- 先教直線，做完四步找不同之後，才介紹不是直線的線（條狀）就叫曲線。
- 先教球體（也可選其他立體），做完四步找不同之後，才考慮不是球體的立體，再藉找不同教錐體，然後考慮不是球體，也不是錐體的立體，聚焦柱體。

α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π

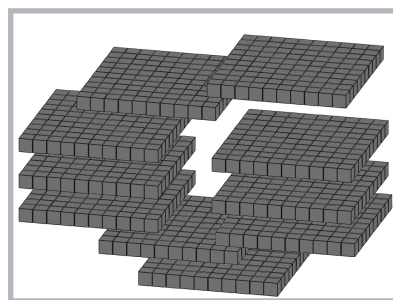
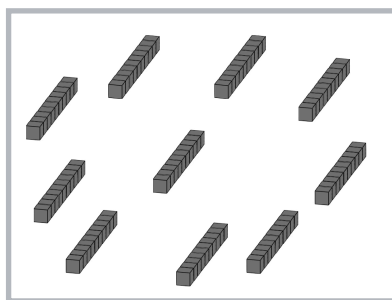
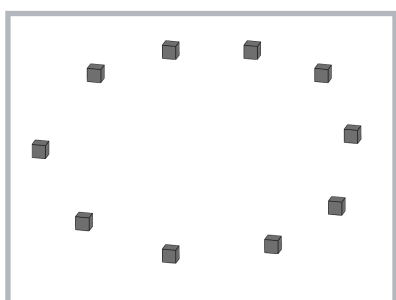


每個數用獨有的符號表示，16個數，就要用16個不同的符號！

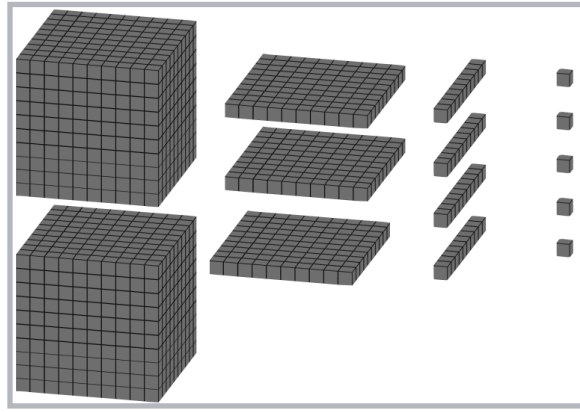
如何用最少的符號，表示最多不同的數？

如何重複使用有限個符號，來表示無限多個不同的數？

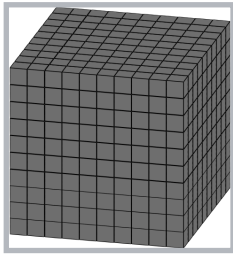
組成更大的數量



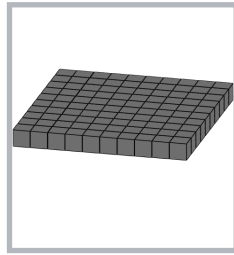
- 逢十組成高一級的數量，分級記錄。
- 每級只有0至9個。
- 由右至左分欄記錄，逐一進級。



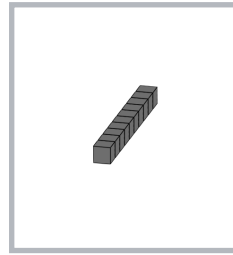
分欄記錄



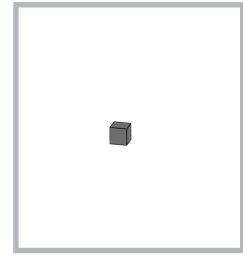
2



3



4



5

進位

$18 + 34 = ?$

滿10「粒」換成1「條」

用直式記錄以上計算的過程：

十位	個位
1	8
+	3 4
<hr/>	
4	2

十位	個位
1	8
+	3 ₁ 4
<hr/>	
4	2

十位	個位
1	8
+	3 ₁ 4
<hr/>	
5	2

分欄計算，各欄數值都在18以內。

退位

32 - 17 = ?

步驟1
先對位

十位	個位
3	2
-	1 7
?	?

步驟2
看看個位，要退位嗎？

1 條換 10 粒

取走 7 粒

十位	個位
2	12
-	1 7
?	?

步驟3
計算十位

取走 1 條

十位	個位
2	12
-	1 7
1	5

個位不夠減時，我們便要「退位」，把 1 條換 10 粒。

3 - 1 = 2 2 + 10 = 12

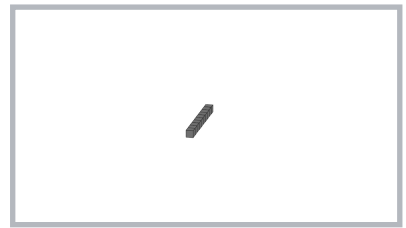
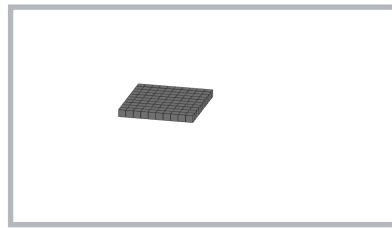
退 1 得 10

2 + 10 = 12

可以先計算十位嗎？

分欄計算，各欄數值都在18以內。

分拆成更小的數量




- 從個位起逐次等分十份得更小一級的數量，分級記錄。
- 每級只有0至9個。
- 由左至右分欄記錄，逐一退級。

重施故伎

- 依位值分欄計算，小數加減與整數無異。
- 逢十進一，退一得十，進退位法則相同。

分欄計算，各欄數值都在18以內。

整數乘法



可用乘法算式「 2×7 」表示
「 $2+2+2+2+2+2+2$ 」，
7個2連加。

「 \times 」是乘號，
「 2×7 」讀作
「2 乘以 7」或
「7 乘 2」，
表示 2 的 7 倍。

乘式中各數有不同的名稱：
 $2 \times 7 = 14$

- 重複連加的數
稱為被乘數
- 出現的次數
稱為乘數
- 乘法的結果
稱為積

我們可以用不同的方式，表示「連加的2出現7次」：

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
7個2連加
2×7
2的7倍

重施故伎：分數乘法

每份早餐有一杯橙汁，每杯橙汁有 $\frac{1}{5}$ 升。

4 杯橙汁共有多少升？

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \bigcirc \square$$

$$= \square$$

∴ 4 杯橙汁共有 \square 升。

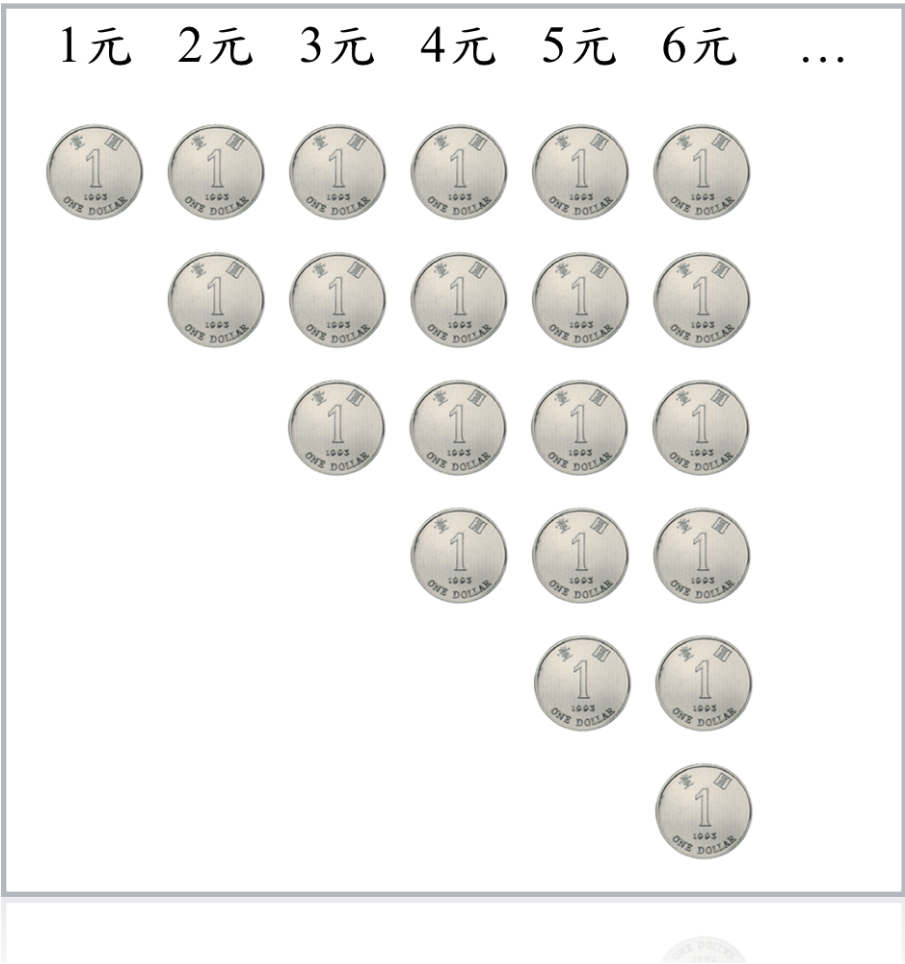
4 個 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ 的 4 倍

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 4 = \frac{1 \times 4}{5} = \square$$

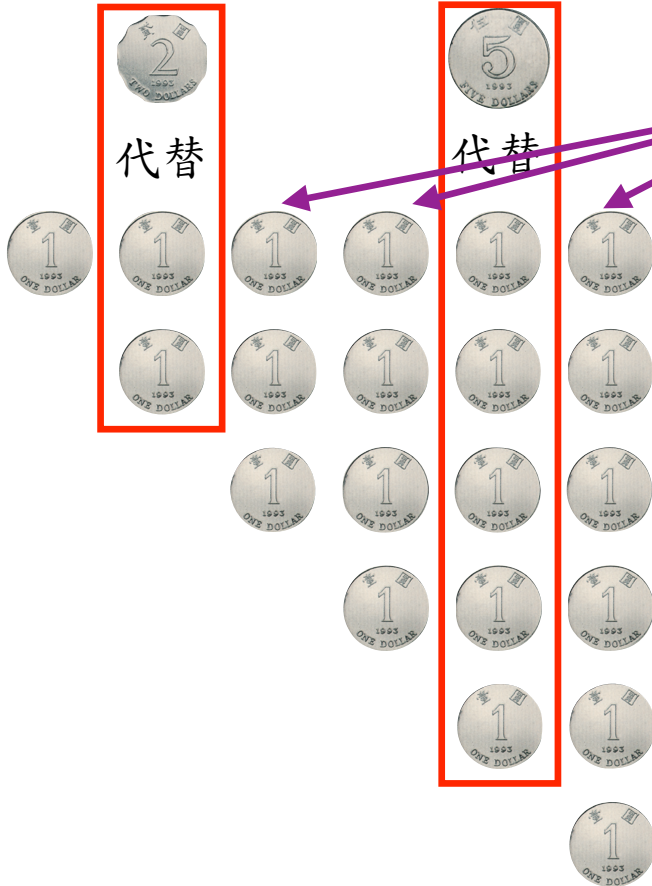
$\frac{4}{5} = \square$ 個 \square

貨幣應用

- 貨幣運用涉及多重單位（1角、2角、5角、1元、2元、5元、10元），是十分複雜的記數系統，限制只以1角、1元和10元為單位（即是把所有角數以若干個1角表示，把所有元數以若干個1元和若干個10元表示），可把情況簡化，並對應十進位值記數系統。



1元 2元 3元 4元 5元 6元 ...

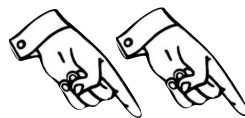
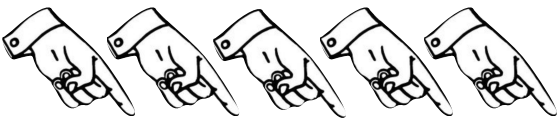


其他情况如何代替？

貨幣總值

● 數出貨幣總值時，必須按幣值重複點數。

數總幣值的手法



「度量」是指關於某些特質
量化表達和比較的學問。

示例

- 量化特質「有多遠」衍生「距離」概念。
- 量化特質「平面區域的大小」衍生「面積」概念。
- 量化特質「容器可盛載東西的空間」衍生「容量」概念。
- 量化特質「承托物件力量的大小」衍生「重量」概念。
- 量化特質「過了多久」衍生「時間」概念。

量化工作的演進軌道

- 直接比較：在不涉第三種事物的情況下，測定事物A與事物B，哪個具有較多（高）特質X。
- 間接比較：在借助第三種事物M的情況下，測定事物A與事物B，哪個具有較多（高）特質X。

量化工作的演進軌道

- 運用單位量度：選擇事物U作為參考對象（量度單位），然後測定其他事物具有特質X的程度，是事物U的多少倍。
- 自訂單位：選擇的參考對象（量度單位）來自個人喜好，並未被廣泛應用。
- 公認單位：選擇的參考對象（量度單位）已被廣泛應用。

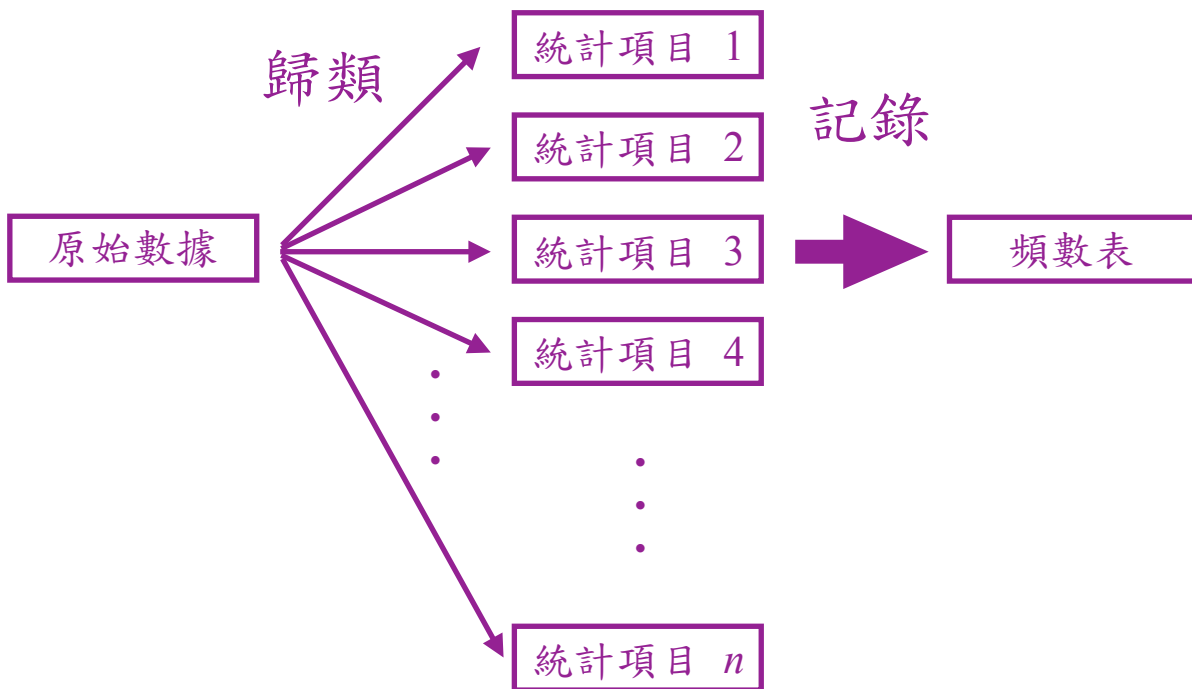
度量的教學

- 一般可按「直接比較」→「間接比較」→「自訂單位」→「公認單位」→「量感培養」這條脈絡編排教學。
- 同一種特質的量度，通常有多於一個不同大小的單位，以滿足不同精確度的需要；不同單位之間通常有明確的換算公式。
- 某些情況下，可製作量尺（讓人直接讀出量度結果的器具）；有了量尺，量度活動就可按程序完成。

度量的教學

- 量度得出的結果都是近似值。
- 在沒有量尺可用的情況下，量度結果有時會藉推算得出，例如面積、體積等。

整理數據



製圖

- 以「圖形個數」顯示「頻數」。
- 以「棒長」顯示「頻數」。
- 改變1個圖形或1格棒長代表的頻數，只是換單位的工作而已（1個圖形或1格棒長代表5，與1個5元硬幣代表5個1元，本質上並無不同）。

甚麼是STEM教育？

For most, it means only science and mathematics, even though the products of technology and engineering have so greatly influenced everyday life. A true STEM education should increase students' understanding of how things work and improve their use of technologies. STEM education should also introduce more engineering during precollege education. Engineering is directly involved in problem solving and innovation, two themes with high priorities on every nation's agenda. Given its economic importance to society, students should learn about engineering and develop some of the skills and abilities associated with the design process.

- Science 科學
- Technology 科技
- Engineering 工程
- Mathematics 數學

Bybee, R. W. (2010). What is STEM Education? *Science* 329 (5995) pp. 996–996

「數學」地位超然，在S、T、E三方面都有廣泛應用，做好數學教育，不就是做好STEM教育嗎？

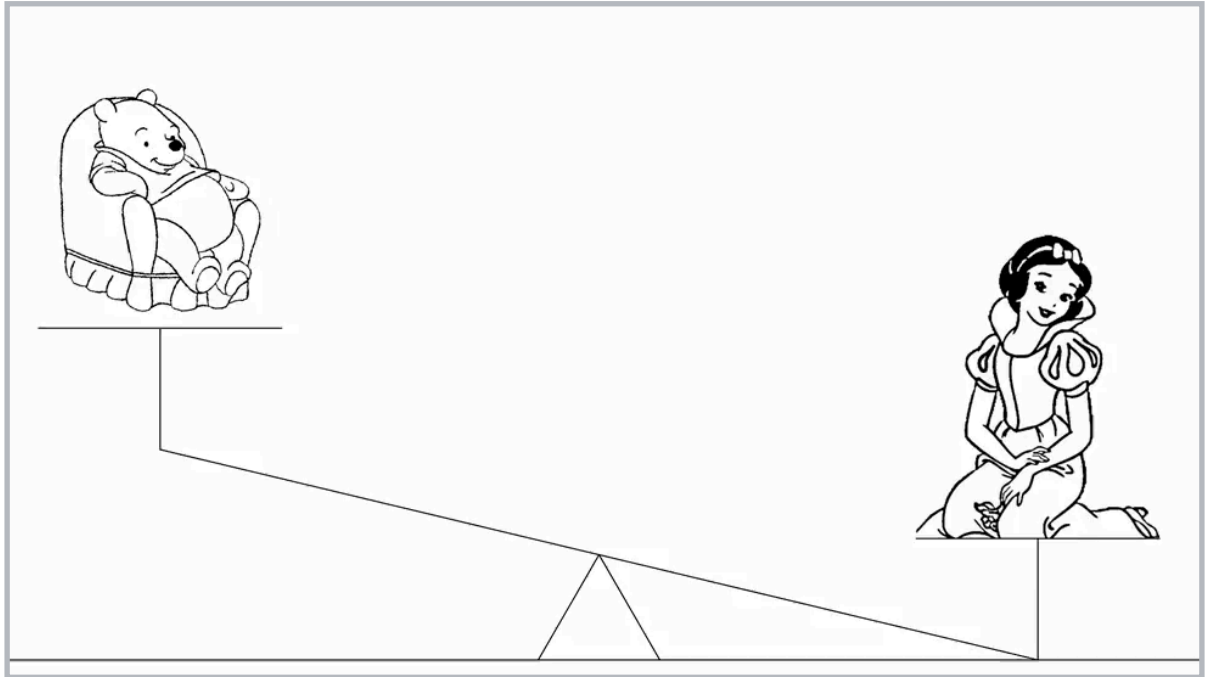
要M為STEM教育作出最大貢獻，
不是在數學課大量加入本應在其他
科講解的應用示例，而是藉數學教
學提升科學頭腦與科學態度。

理順知識結構，讓數學知識在高科
學規格的軌道上產生，就能培育
科學頭腦和科學態度。

大膽假設，小心求證！

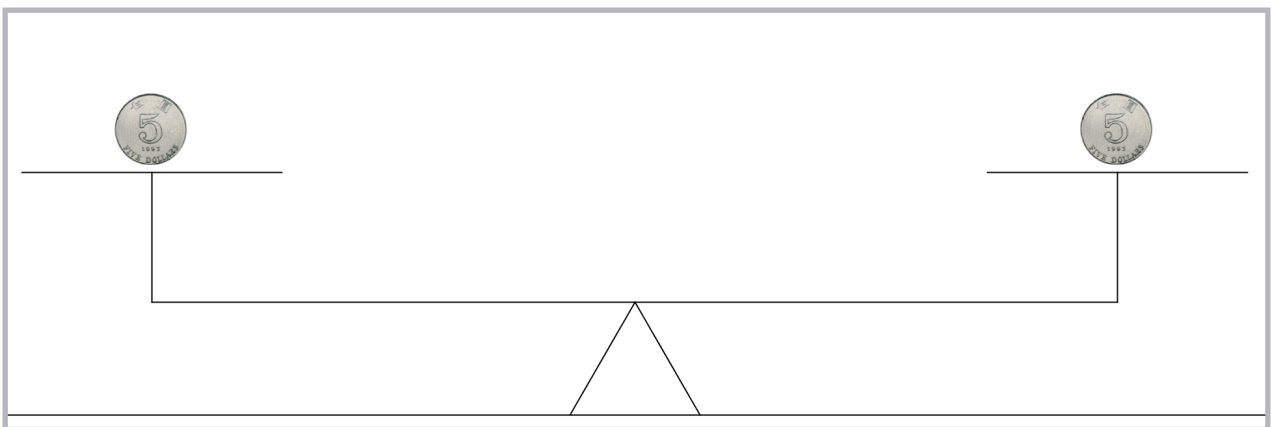
從搖搖板（或玩間尺）到天平

從生活經驗出發，與學生討論如何比較重量



從搖搖板（或玩間尺）到天平

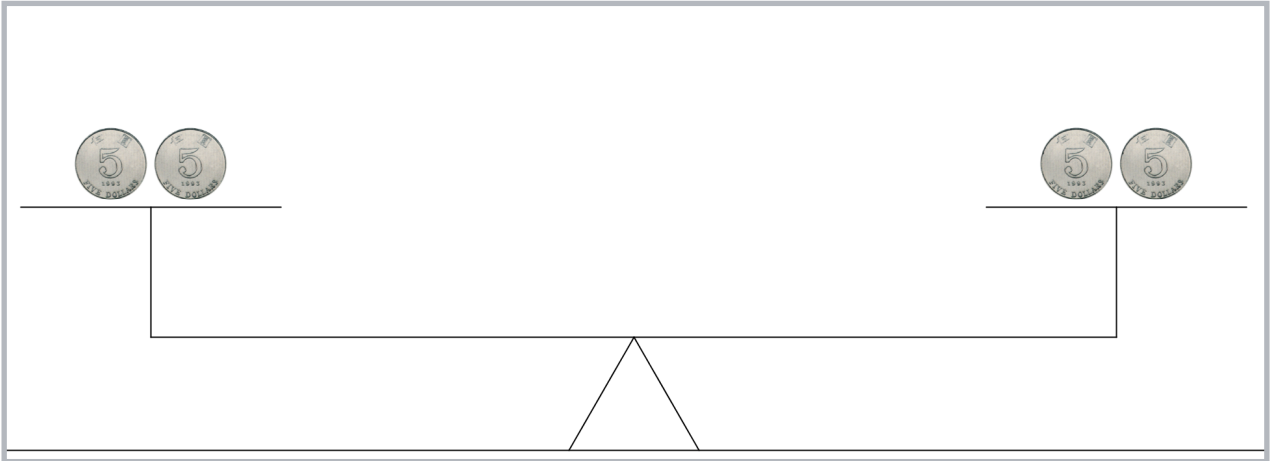
先測試兩邊放（重量）完全相同的東西



如果兩邊不平衡，即調校至兩邊平衡。

從搖搖板（或玩間尺）到天平

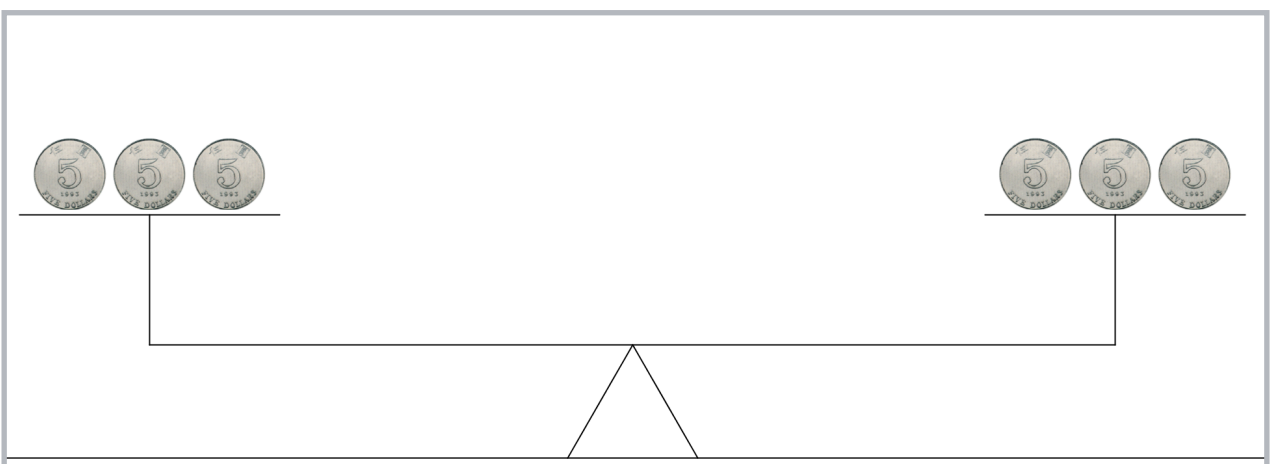
先測試兩邊放（重量）完全相同的東西



兩邊改放其他相同的東西，理應保持平衡。

從搖搖板（或玩間尺）到天平

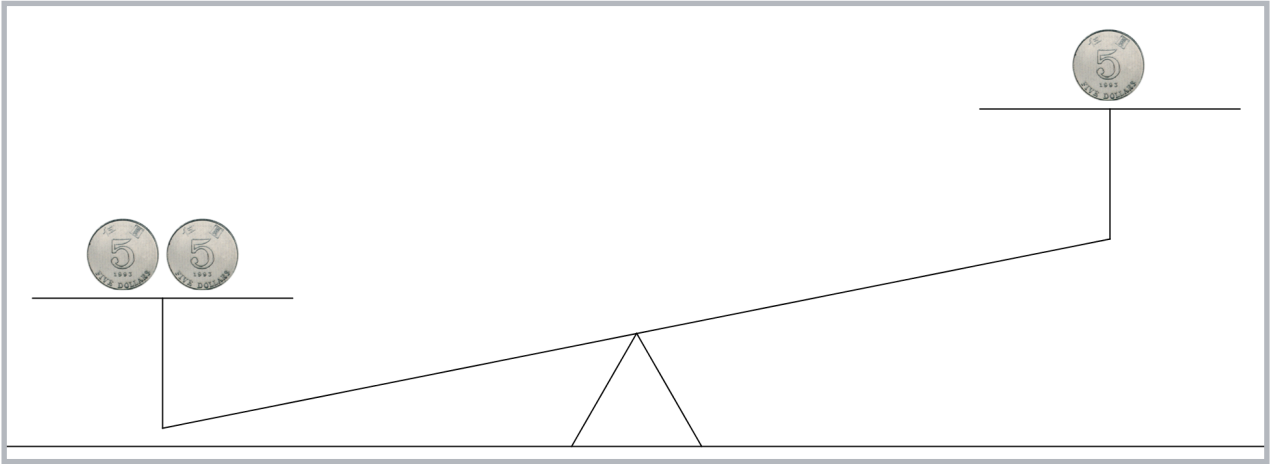
先測試兩邊放（重量）完全相同的東西



兩邊改放其他相同的東西，理應保持平衡。

從搖搖板（或玩間尺）到天平

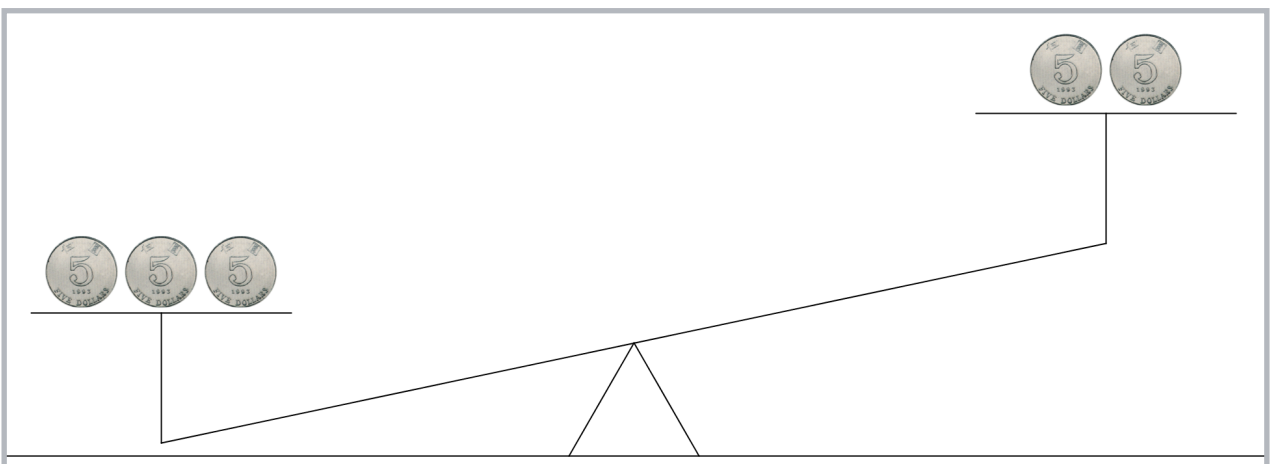
再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



觀察肯定較重（輕）的一邊

從搖搖板（或玩間尺）到天平

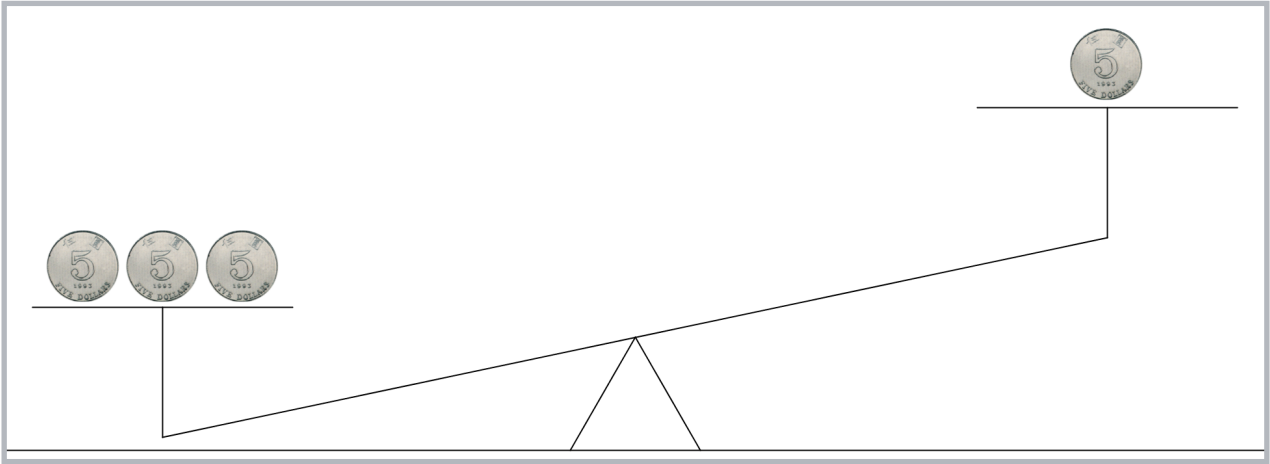
再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



看來較重（輕）的一邊會下墜（上升）

從搖搖板（或玩間尺）到天平

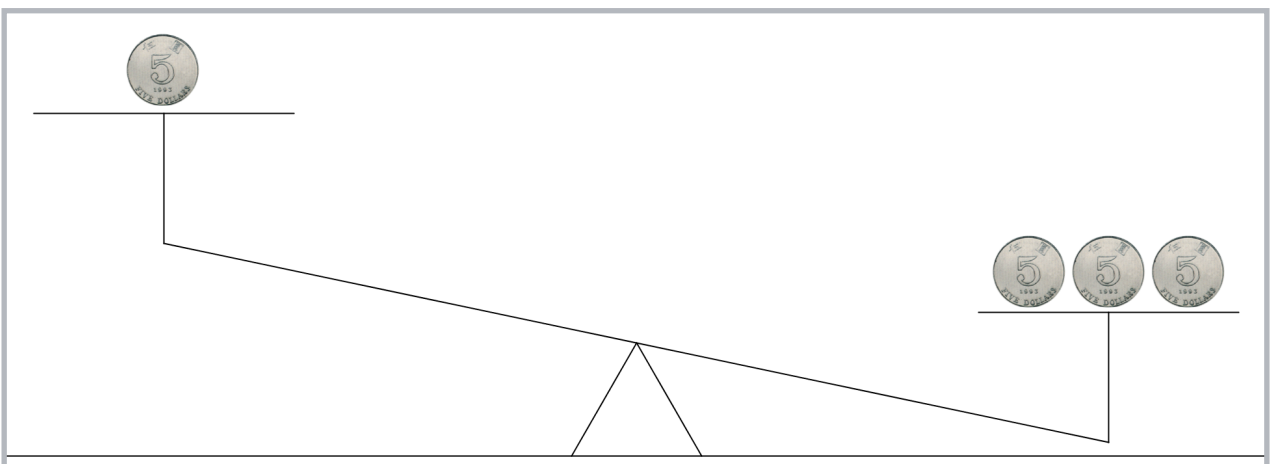
再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



看來較重（輕）的一邊會下墜（上升）

從搖搖板（或玩間尺）到天平

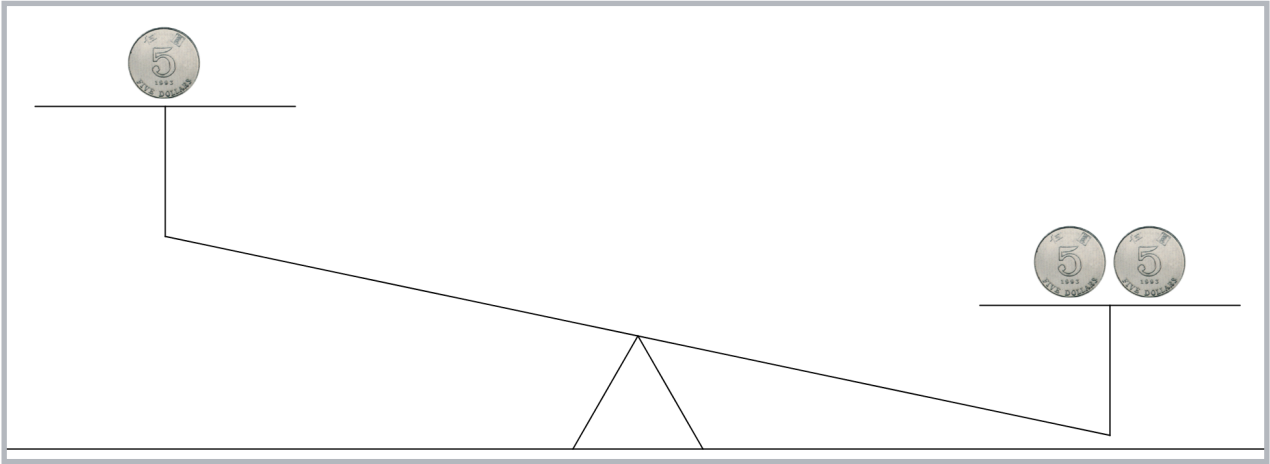
再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



試試左右對調

從搖搖板（或玩間尺）到天平

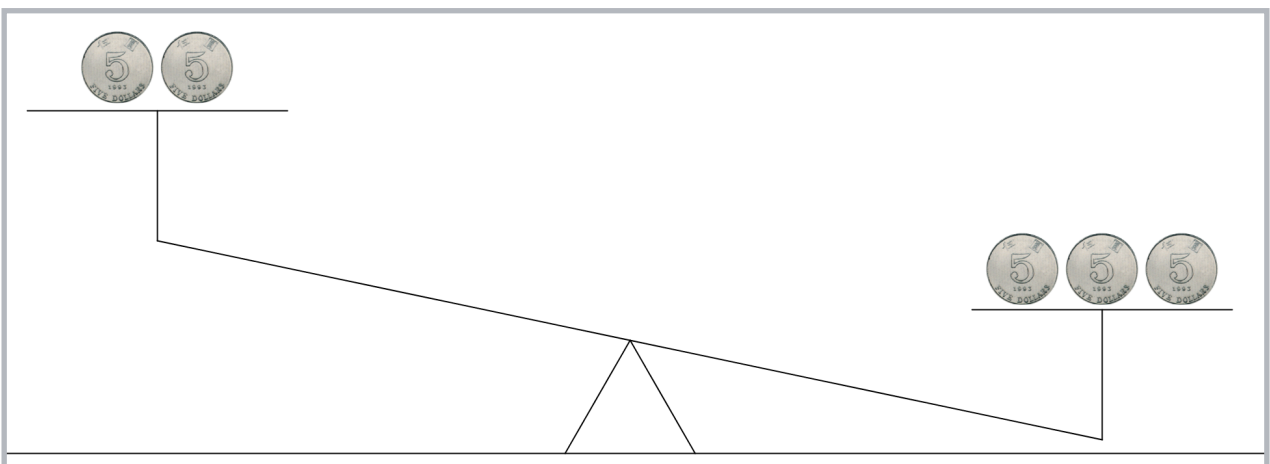
再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



試試左右對調

從搖搖板（或玩間尺）到天平

再測試兩邊放重量（肯定）不同的東西



試試左右對調

獲得結論

在已校正的天平兩邊分放物件，

- 如果兩邊平衡，即表示兩邊所放物件重量相等。
- 如果兩邊不平衡，上升一邊所放物件較輕，下墜一邊所放物件較重。

數學科推行STEM教育

- 科學、科技的根本，也是STEM教育的根本，在於科學頭腦與科學態度，而非習得多少知識板塊，或答對多少考題。
- 理順知識結構，小心設計和管理數學知識產生及演進的過程，不只能推動STEM教育，更可改善學與教的品質，解決不少教師面對的問題。

結語

- 過去19年在主流學校推行的數學化教學，就是為了讓學生體驗數學知識從無到有，由粗疏到精密的演變過程。做好這項工作的先決條件，就是理順知識結構，刻劃清楚的學習階段和中途站。
- 在今天的分享會上，大家可以看到處理好知識結構，對教與學可以帶來怎樣的影響。