

教育局
中學校本課程發展組
2024/25 學年

通過數學建模，提升學生的數學應用能力

順德聯誼總會鄭裕彤中學

學校背景

- 2024/25學年關注事項：深化自主學習，提高學術表現
 - 提高學生的學習動機及自信心
 - 提升學生科技創新能力和應用能力
- 學生
 - 大部分屬第二組別，學習能力和動機中等
 - 認為數學與實際生活脫節
- 教師團隊
 - 大部分為資深教師
 - 科主任領導能力強、執行能力高
 - 有豐富的STEAM活動推行經驗

數學建模規劃

學校加強**數學建模的規劃**，讓學生綜合運用數學知識和技能，解決**真實情境的問題**，提升學生的**數學應用能力**和**數學思維**

級別	數學建模學習活動
中一級	我是建築師-建造最大總樓面面積
中二級	測斜儀量度活動
中三級	設計可盛載最多爆谷的圓錐體
中四級	模擬傳染病模型
中五級	透過微分設計可盛載最多爆谷的圓錐體

數學建模可以幫助學生以**多於一個方法**解決現實問題，為學生創造**應用相關數學知識和技能**解決現實生活問題的機會，通過**分析問題並為問題建模**來制定解決方案，最終解決問題。

中三：設計可盛載最多爆谷的圓錐體

1. 準備
 - 將真實情境的問題轉化成數學問題：找出圓錐體的最大體積
 - 跨課題的學習：畢氏定理、面積與體積、代數式、解一元一次方程
2. 假設
 - 圓錐體體積愈大，盛載愈多爆谷
 - 製造圓錐體時不須預留接口位
 - 爆谷恰好接觸到水平面
3. 建模
 - 運用圓錐體的公式來找出其底半徑、高和體積
 - 利用 Excel 輸入公式進行「二分法」來找出圓錐體最大體積的可行解
4. 測試
 - 學生製作模型，通過實際測試圓錐體的容量，比較現實與理論的結果
5. 優化
 - 基於測試結果，修訂假設或設計，提升實用性
 - 為了善用物料和提供不同選擇給消費者，可以利用整個圓形製造兩個圓錐體

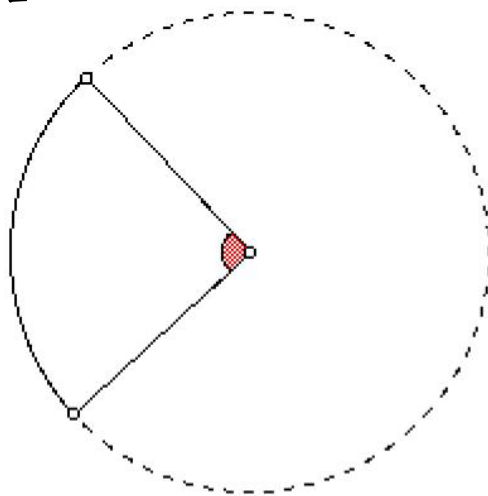
中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

解決現實問題

你是製造圓錐體爆谷杯的供應商。

原材料是半徑為 38 cm 的圓形卡紙。

你需要通過改變扇形角度的大小，將扇形折疊成一個或多個圓錐體，使其**實際能夠**盛載最多數量的爆谷。



轉化成數學問題

找出圓錐體最大體積

作出假設

學生通過異質分組進行小組討論

為了定義問題和簡化問題，你的模型需作出哪些假設？

- (1) 圓錐體的體積 = $\frac{\text{所有爆谷的體積}}{n}$
- (2) 設每一粒爆谷的體積一樣
- (3) 設爆谷剛好裝滿倒圓錐的底部
- (4) 製造圓錐體時不須預留接口位

中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

教師設計分層工作紙，
引導學生通過小組協作

建構數學模型

- 通過考慮

(1) 扇形半徑 = 圓錐體斜高 (l) 及

(2) 扇形面積 = 圓錐體曲面面積

找到圓錐體底半徑 (r) = $l \times \frac{\theta}{360^\circ}$

- 運用畢氏定理得出

圓錐體的高 (h) = $\sqrt{l^2 - r^2}$

- 最後找到圓錐體的體積 (V) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

進行多次「二分法」，得出以下結果：
當扇形角 $\approx 294^\circ$ ，圓錐體體積是最大

利用 Excel 輸入公式

運用「二分法」找到可行解

	A	B	C	D	E
1	找出圓錐體最大體積				
2	扇形半徑=圓錐體斜高 l	扇形角 θ	圓錐體底半徑 r	高 h	圓錐體體積 V
3	38	10	1.1	38.0	44.3
4		20	2.1	37.9	177.1
		⋮	⋮	⋮	⋮
30		280	29.6	23.9	21848.6
31		290	30.6	22.5	22094.0
32		300	31.7	21.0	22057.8

3	扇形半徑=圓錐體斜高 l	扇形角 θ	圓錐體底半徑 r	高 h	圓錐體體積 V
4	38	280	29.6	23.9	21848.6
5		285	30.1	23.2	22002.5
6		290	30.6	22.5	22094.0
7		295	31.1	21.8	22115.3
8		300	31.7	21.0	22057.8
9					
10					
11	扇形半徑=圓錐體斜高 l	扇形角 θ	圓錐體底半徑 r	高 h	圓錐體體積 V
12	38	291	30.7	22.4	22104.1
13		292	30.8	22.2	22111.4
		293	30.9	22.1	22115.7
		294	31.0	21.9	22117.1
		295	31.1	21.8	22115.3

這個數學答案能否
解決現實問題呢？

中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

檢驗模型



學生動手量度扇形角，製作圓錐體



在接口位貼上膠紙



數算實際盛載的木粒(爆谷)數量

(a) 在現實生活中，哪些假設可能會難以成立？為甚麼？

(1) 爆谷的體積，大小不相同
留下空隙

(2) 成品的形狀難以很好地抓握、抓牢
在測試中粒粒很易掉落，若用在現實生活中，所盛載的東西也會如此
造成浪費

中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

檢驗模型

(3) 假設(1) 圓錐體的體積=所有爆谷的體積
現實上是不可能
應改為圓錐體體積愈大，盛載愈多爆谷

(4) 假設(2) 每粒爆谷的形狀和體積相同
現實上是不可能
應把量度爆谷數量改為爆谷重量

但新的假設(1)不適用於較小的扇形角
例如扇形角=1°，圓錐體不能盛載爆谷

(5) 經測試後，假設(3)和(4)
在工具的幫助下是實際可行的

當 $290^{\circ} \leq \text{扇形角} \leq 300^{\circ}$ ，
摺疊所得的圓錐體體積各異，
但能夠盛載的爆谷數量很可能相同

中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

優化模型

為了更迎合顧客需要，學生討論如何改良產品

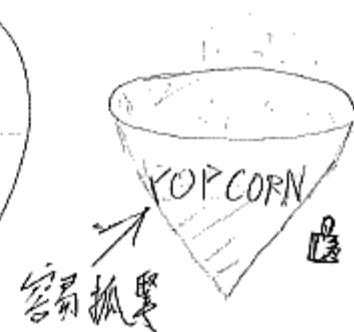
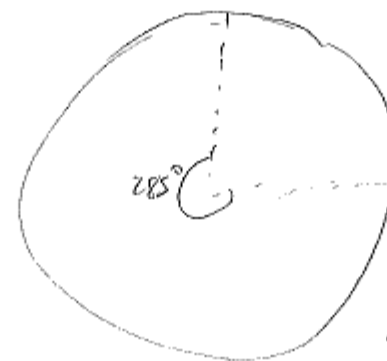
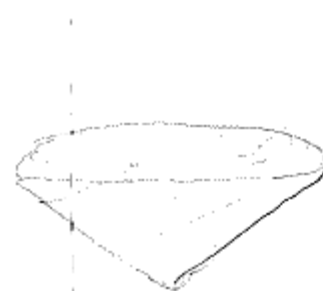
- (1) 令裝爆谷容器增加把手和蓋子，方便顧客長時間握著，還可以防止爆谷變熱和新鮮。

用鋒利物料作手柄



- (2) 角度要少 方便盛載

把容器的角度減少，令產品變得易抓握，且盛載的爆谷不容易掉落。



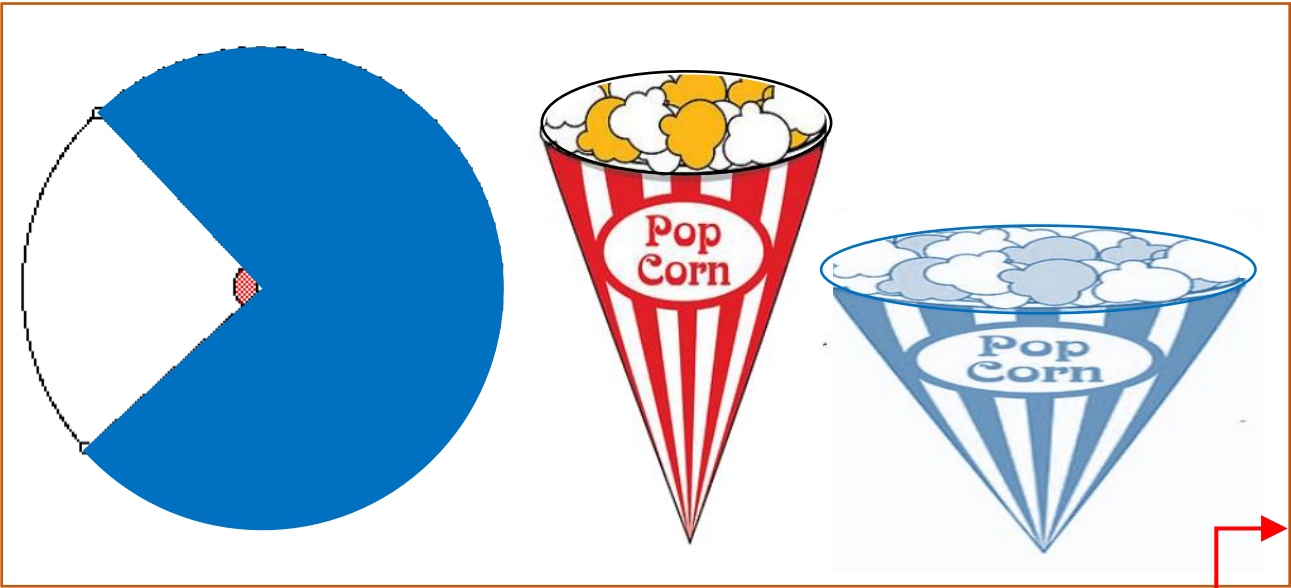
學生在不同的考量下，出現多重解答，沒有最佳答案

中三:設計可盛載最多爆谷的圓錐體

優化模型

在不同的考量下，出現多重解答，沒有最佳答案

(3) 為了善用物料和提供不同選擇給消費者，
可以利用整個圓形製造兩個圓錐體



(2) 扇形角=120°和240°製作的圓錐體總體積最大

(3) 扇形角=180°最方便，不用費時調整角度
而且製作的圓錐體總體積與 (2) 相約

1	善用整個圓形製造兩個圓錐體					
2						
3	扇形角 θ	圓錐體體積 $V1$		反角 $360 - \theta$	圓錐體體積 $V2$	總體積
4	10	44.3		350	12712.7	12757.0
5	20					
6	30		(1) 扇形角 $\geq 50^\circ$ ，總體積更大，盛載更多爆谷			
7	40	705.0		320	20799.7	21504.7
8	50	1097.7		310	21663.0	22760.7
9	60	1573.8		300	22057.8	23631.6
10	70	2131.1		290	22094.0	24225.0
11	80	2766.7		280	21848.6	24615.2
12	90	3477.3		270	21379.2	24856.5
13	100	4259.3		260	20730.7	24990.0
14	110	5108.3		250	19939.5	25047.7
15	120	6019.5		240	19035.3	25054.8
16	130	6987.5		230	18043.7	25031.2
17	140	8006.2		220	16986.2	24992.3
18	150	9068.8		210	15881.6	24950.4
19	160	10167.8		200	14746.4	24914.2
20	170	11295.0		190	13595.2	24890.1
21	180	12440.8		180	12440.8	24881.7

成效與反思

- 學生數學能力的提升：
 - 大部分學生掌握圓錐的斜高為扇形的半徑
 - 能力較佳學生能夠運用「曲面面積等於扇形面積」，連結扇形角和圓錐體積
 - 能力稍遜學生利用電子課件，代入數字找到對應的扇形角
 - 大部分學生能夠運用數學來建立及解決日常生活問題，把真實問題轉化為數學問題，通過合理的假設建立模型
 - 部分學生能夠通過反覆試驗進行分析，運用數學優化模型
- 學生對生活情境題感興趣，認為數學建模能連繫數學與實際生活
- 學生投入學習，在異質分組中積極參與小組討論，通過教師和同儕的回饋建構知識

成效與反思

- 教師團隊：

- 了解如何把課本的文字應用題，轉化為現實生活問題
- 發現數學建模門檻不高，能夠普及化
- 發展新的教學模式：從教師主導到以學生為中心
- 發現設計貼近學生生活的情境，更易引發學生興趣
- 認同數學建模提升學生的數學應用能力、解難能力
- 總結實踐經驗，於下一學年會持續發展其他級別的數學建模活動

— 完 —