

題目：發展探索與研究課堂來提升學生的解難能力

講者：唐永康先生（教育局 小學校本課程發展組）

鄧春霞老師 洪欣欣老師 馬正源老師（嘉諾撒聖方濟各學校）

2017 年，課程發展議會更新了數學教育學習領域課程指引（小一至中六），強調在課堂中推展探索與研究的教學活動。此舉旨在鼓勵學生在數學學習中積極進行探索和研究，以提升他們的學習成效。在課程指引中，建議各級全年共有 10 小時的課時（約 20 個課節）進行探索與研究的學習活動。然而，教師普遍反映發展探索與研究的教學活動十分具挑戰性，同時又擔心探究活動會消耗課時，影響正常的教學進度。因此，在推展探索與研究的教學活動時，教師需要考慮如何配合數學科常規課程，以幫助學生提升數學能力的同時，不影響正常的教學進度。

嘉諾撒聖方濟各學校一向著重學生思維能力的訓練，早年已開始在數學科中有系統地教授學生不同的解難策略。然而，學校發現部分學生只能理解和運用部分解難策略，並不能全面提升學生的解難能力。因此，學校希望透過發展探索與研究的課堂活動，培養學生的計算思維，以進一步提升學生的解難能力。教師們期望透過課堂活動，讓學生在解決問題的過程中，運用所學的解難策略，進一步提高她們的數學能力和思維能力。

探索與研究

《數學教育學習領域課程指引》長期以來一直倡導學校在數學課堂中推展探索與研究的教學活動，旨在提升學生的明辨性思考、邏輯分析和創意能力。同時，該指引也期望通過小組協作的方式，讓學生進行探究活動，培養其協作精神和互相尊重的態度。在探索與研究活動中，學生經常需要與同學和教師進行討論，這有助於他們提升「說數」能力和靈活處理問題的能力。

此外，在探索與研究活動期間，學生往往會遭遇挫折和失敗，而教師可以透過這些活動培養學生面對挑戰的毅力，並讓他們學會運用數學解決問題和表達意見的能力。這種學習體驗也有助於培養學生對自己學習負責的態度。

5E 教學模式 (5E instruction model)

5E 教學模式是一種以探究式學習為基礎的課堂設計模式，包括五個不同的階段：投入 (Engage)、探索 (Explore)、解釋 (Explain)、闡述 (Elaborate) 及評量 (Evaluate) (Bybee et al., 2006)。

投入 (Engage) 階段旨在引起學生學習的動機，讓學生對探究問題產生興趣和疑問，同時也讓學生了解探究問題的背景和意義。

探索 (Explore) 階段是讓學生進行探究活動的階段。教師可以安排一些操作活動，讓學生進行探究，並鼓勵學生在課堂上進行討論和交流彼此的觀察和想法。

解釋 (Explain) 階段是讓學生分享在探究過程中所發現的知識和想法的階段。教師可以讓不同的學生在課堂上分享他們的想法和發現，並透過提問和交流，幫助學生歸納和總結他們的發現。

闡述 (Elaborate) 階段是引導學生延伸新知識的階段。教師可以透過不同的情境或問題，讓學生將剛探究出來的新知識應用到新的情境中，進一步拓展他們的知識和能力。

評量 (Evaluate) 階段是了解學生學習情況的階段。教師可以透過不同形式的測驗或活動，例如：工作紙、小測或解難問題等，來評估學生是否掌握學習重點。

透過 5E 教學模式的設計，可以讓學生在探究式學習的過程中，積極參與學習、提升學習成效和能力。

計算思維 (Computational Thinking)

計算思維 (BBC Bitesize, n.d.) 由四個主要元素組成，包括拆解 (Decomposition)、找出規律 (Pattern Recognition)、抽象化 (Abstraction) 和演算法 (Algorithms)。

- 拆解：將複雜的問題分解為較小的問題，或可處理的部分。
- 找出規律：在問題中尋找規律和相似之處。
- 抽象化：關注重要信息，排除不必要的數據。
- 演算法：設計解決問題的方法或原則。

隨著資訊科技的迅速發展，計算思維和編程教育日益受到關注。除了在電腦和資訊科技課程中推廣編程教學外，學校還積極將計算思維和編程融入數學課程中進行學習。在數學課程中推動計算思維教育時，教師通常會更注重編程學習活動，而忽略了訓練學生的思考過程。根據周以真教授 (2006, 33-35 頁) 提出的觀點，“計算思維是每個人必須具備的基本技能，而不僅僅是計算機科學家所需的技能。就像閱讀、寫作或計算等技能一樣，我們必須讓每個孩子掌握計算思維作為他們的分析能力。” 計算思維可以幫助我們處理複雜的問題，理解問題的本質，並找到解決問題的方法。因此，在發展數學課程中的計算思維時，教師需要更加注重訓練學生的思考過程，從而提高他們解決問題的能力。

四年級 – 乘法

在乘法單元中，教師按照 5E 教學模式設計了一個探究活動，旨在讓學生探索如何使用 4 張數字卡組成兩個兩位數的乘式，其中積是最小的。

課堂設計

在投入階段，教師運用一個排列數字卡的遊戲來引起學生的學習動機，學生需要使用 4 張數字卡組合出不同的兩位數乘式，以發現相同數字卡可組成不同的兩位數乘式，而它們的積也會不同。

在探索階段，教師透過提問引發學生思考是否有快速的方法可以找到最小乘積的乘式，同時安排學生分組使用不同的數字卡進行探究。

在解釋階段，教師首先安排學生在小組內分享她們發現乘法的方法，並邀請各組把她們所得到的結果與其他組進行比對。接下來，教師引導學生觀察各組算式的相似之處，並探究找到最小乘積算式的法則。

在闡述階段，教師在問題中加入數字卡中含有零或是所得的積為奇數或偶數的要求，以檢驗學生是否掌握解決問題的方法。

在評量階段，教師使用不同的數字卡組合來檢視學生的學習成果。

學生表現

學生對探究問題表現出濃厚的興趣，她們透過試誤和運算，尋找一組數字卡的最小乘積。根據學生的課業表現，學生積極嘗試不同的乘式組合和計算，並思考如何組成最小乘積算式的特徵。不同的學生有著不同的解題方法，有些學生會嘗試列出和計算所有的算式後再進行比較（圖一），而其他學生則只需列出三道算式就能夠判斷出最小乘積的算式。這是因為這些學生已經了解到最小的數字必須是其中一個兩位數的十位（圖二）。在小組探究活動中，學生能夠通過比較各小組的不同結果，找出不同數字組合的乘式是否有相似之處。透過課堂討論，學生能夠解釋只要按照小至大的順序排列4張卡，然後利用第1張和第3張數字卡，以及第2張和第4張數字卡分別組合成兩個兩位數，那麼它們的積必定是最小的（圖三）。

列舉不同的兩位數的乘式，並計算答案。

1. $14 \times 58 = 812$	10. $14 \times 85 = 1190$
2. $15 \times 48 = 720$	11. $15 \times 84 = 1260$
3. $18 \times 45 = 810$	12. $18 \times 54 = 972$
4. $54 \times 18 = 972$	13. $81 \times 45 = 3645$
5. $51 \times 48 = 2448$	14. $81 \times 54 = 4374$
6. $51 \times 84 = 4284$	15. $84 \times 51 = 4284$
7. $54 \times 81 = 4374$	16. $84 \times 15 = 1260$
8. $58 \times 41 = 2378$	17. $85 \times 41 = 3485$
9. $58 \times 14 = 812$	18. $85 \times 14 = 1190$
	19. $41 \times 85 = 3485$
	20. $41 \times 58 = 2378$

積最小的乘式：很用心!
 $\boxed{4}\boxed{8} \times \boxed{1}\boxed{5} = 720$
 再想想，能不能找到更小的乘式呢？
 $21. 45 \times 81 = 3645$ $22. 45 \times 18 = 810$ $23. 48 \times 51 = 2448$ $24. 48 \times 15 = 720$

(圖一)

列舉不同的兩位數的乘式，並計算答案。

$24 \times 69 = 1656$ ✓ $29 \times 46 = 1334$ ✓
 $26 \times 49 = 1274$ ✓

積最小的乘式：
 $\boxed{2}\boxed{6} \times \boxed{4}\boxed{9} = 1274$ ✓

(圖二)

先把四張數卡由小至大排列：

第一張	第二張	第三張	第四張
(最小)			(最大)

被乘數和乘數的十位：
最小的兩個數 (第一、二張) ✓

被乘數和乘數的個位：
個，第二大的數 (第三張卡) 最大 (第四張卡) ✓

被乘數和乘數的十位：
最小的兩個數

被乘數和乘數的個位：
第二大的兩個數 $\nearrow$ 大大 $\times$ 小小

$\boxed{\text{第一張}}\boxed{\text{第三張}} \times \boxed{\text{第二張}}\boxed{\text{第四張}}$ ✓

(圖三)

在闡述的階段，教師利用一組含零的數卡去檢視學生是否能夠應用之前發現的技

巧去解決相似的題目。在課堂中，學生能夠解釋她們需要先決定兩個數的十位數字後，再根據之前的原則組合數卡，便可以得出最小乘積的算式。教師在另一挑戰題中加多了一個積必定是奇數的要求，並在課堂中發現大部分學生都能夠找出正確答案，同時能夠解釋她們處理挑戰題的策略（圖四）。在評量題目中，教師發現全部學生都能夠正確答對有關題目（圖五），反映她們已經掌握了解決這類題目的技巧。由此可見，學生透過探究活動，發現並掌握了處理這些題目的策略和技巧，解難能力也有所提升。

(1)

3 4 5 1

(a) 組成一道積最小的乘式。 $\boxed{1}\boxed{4} \times \boxed{3}\boxed{5} = \underline{490}$

(b) 組成一道積最小
且是奇數的乘式。 $\boxed{1}\boxed{3} \times \boxed{4}\boxed{5} = \underline{585}$

（圖四）

(2)

7 1 3 2

(a) 組成一道積最小的乘式。 $\boxed{1}\boxed{3} \times \boxed{2}\boxed{7} = \underline{351}$

(b) 組成一道積最小
且是偶數的乘式。 $\boxed{1}\boxed{2} \times \boxed{3}\boxed{7} = \underline{444}$

（圖五）

透過探索與研究的活動，學校致力於培養學生的計算思維能力，以提升其解難能力。在探究活動開始之初，學生透過不同的數字卡組合算式進行計算，同時觀察每組數字卡得出最小乘積乘式的共通點。此活動要求學生具備拆解與找出規律的能力，並先由組合兩位數的思考成找出十位數的數字，這是一個相對較簡單的問題。之後，學生進一步觀察不同組別的算式，並找出每張數字卡由小至大排列的規律。在此過程中，學生運用顏色的幫助聚焦於數字卡的位置，以找出算式的規律（圖六）。最終，學生可發現將第 1 張與第 3 張數字卡，以及第 2 張與第 4 張數字卡分別組合成兩個兩位數，即可得出最小乘積的算式演算法。

記錄各組別的乘式，並計算結果。

數卡	積最小的兩位數乘式	答案
4 8 6 3	36×48	1728
5 3 2 7	25×37	925
6 2 4 9	26×49	1274
8 5 6 2	26×58	1508
3 7 4 9	37×49	1813

結果齊討論

(圖六)

五年級 – 多邊形的面積

在多邊形面積的課題，教師讓學生發現用分割法去計算多邊形面積，以及探討不同的分割法的優缺點。

課堂設計

在投入階段，學生製作七巧板並拼砌出不同的圖案以引起學生的學習動機，從而讓學生探究找出多邊形面積的方法。

在首次探索階段，教師引導學生分組進行拼砌活動，探究同一個多邊形可以由不同的三角形或四邊形拼砌而成，而它們的面積都是相等的。

在首次解釋階段，學生分享不同拼砌多邊形的方法，並指出相同的圖形可以由多種方法拼砌出來，從而推論出同一個多邊形面積可以有多種計算方法。

在第二次探索階段，教師引導學生分組使用平板電腦進行分割圖形活動，探究不同方法分割多邊形來計算面積的優缺點。

在第二次解釋階段，學生從分割活動所得的資訊，歸納出較方便及快捷計算面積的方法。

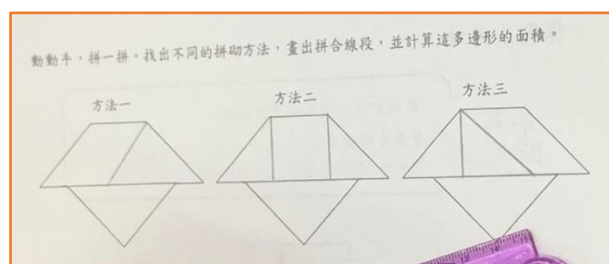
在闡述階段，學生需要按多邊形的形狀及檢視圖形中的資料，去判斷及解釋何種方法最適合用作計算多邊形的面積。

在評量階段，學生會根據多邊形的形狀及題目所提供的資料，選擇最合適的方法，找出多邊形的面積。

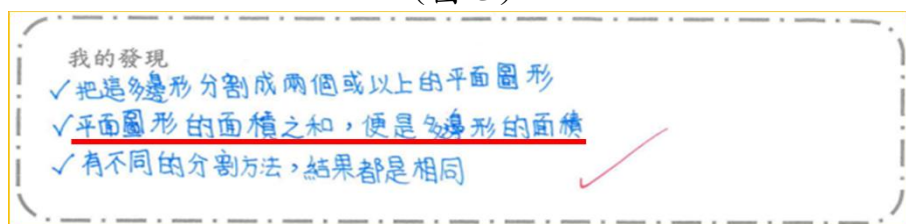
學生表現

透過探究活動，學生發現可以利用不同的分割方法來計算多邊形面積，並歸納出不一定是把圖形作最少分割來計算才是最方便和快捷的。在圖形拼砌活動中，學生發現一個多邊形可以有多種不同的拼砌方法（圖七），而它們的面積都是相同的。因此，學生明白運用分割法計算面積時可以有多於一種方法（圖八）。在第二次探究活動中，教師引導學生積極嘗試用不同方法把多邊形進行分割，並透過

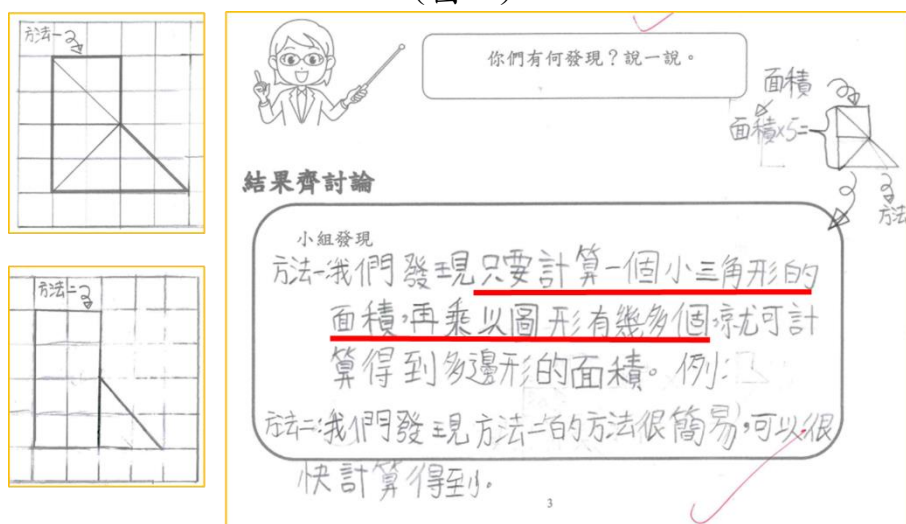
課堂討論，得出把圖形作最少分割，或是分割成多個相同的圖形來計算面積可以是比較方便和快捷的兩個方法（圖九）。



（圖七）



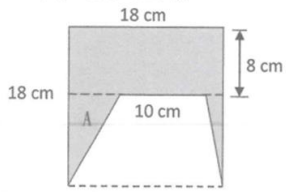
（圖八）



（圖九）

在闡述階段，學生觀察到有些多邊形在分割後，沒有足夠的邊長資料去計算多邊形的面積。因此，學生嘗試使用填補法來解決這個問題（圖十）。在評量階段，學生可以採用較快捷的方法來計算多邊形的面積。有些學生試圖將多邊形分割成12個大小相同的直角三角形來計算面積（圖十一），而其他學生則使用4個大小相同的等腰三角形及1個長方形的分割方式來計算面積（圖十二）。這些例子表明，學生能夠靈活運用兩種可方便計算多邊形面積的方法。

3. 求多邊形的面積。



嘉嘉的計算方法：

$$18 \times 8 = 144$$

∴長方形的面積是 144 cm^2 。

$$(18 - 10) \div 2 \times (18 - 8) \div 2 = 8 \div 2 \times 10 \div 2 = 20$$

∴三角形 A 的面積是 20 cm^2 。

$$144 + 20 \times 2 = 184$$

∴多邊形的面積是 184 cm^2 。

你認為嘉嘉的方法正確嗎？（正確 / 不正確）

如不正確，原因是：

☒ 分割後的平面圖形沒有足夠資料計算

☐ 沒有正確運用分割法或填補法

☐ 公式或計算錯誤

你的計算：

① $18 \times 18 = 324$

∴正方形的面積是 324 cm^2 。

$$(10 + 18) \times 10 \div 2 = 28 \times 10 \div 2 = 280 \div 2 = 140$$

∴梯形的面積是 140 cm^2 。

$$324 - 140 = 184$$

∴多邊形的面積是 184 cm^2 。

（圖十）

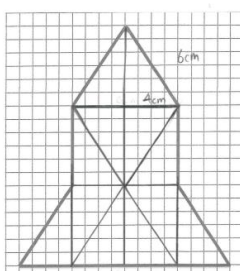
1. 右圖多邊形的面積是多少？

$$6 \times 4 \div 2 = 24 \div 2 = 12$$

∴右圖多邊形的每個小三角形的面積是 12 cm^2 。

$$12 \times 12 = 144$$

∴右圖多邊形的面積是 144 cm^2 。

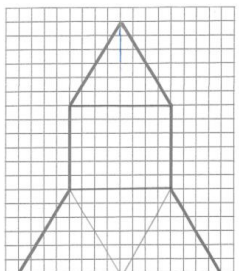


（圖十一）

1. 右圖多邊形的面積是多少？

$$(6 \times 8 \div 2 + 2 \times 4) + (8 \times 6) = (48 \div 2 + 8) + 48 = (24 + 4) + 48 = 96 + 48 = 144$$

∴右圖多邊形的面積是 144 cm^2 。



（圖十二）

在多邊形面積的課題，教師通過設計合適探索和研究活動，讓學生在探究多邊形面積的方法，以及總結出最方便及快捷解決問題方法的過程中，經歷了一次計算思維的訓練。首先，學生需要自己拼砌多邊形或將圖形分割計算面積，即是把多邊形拆解成較簡單的情況進行解題。接著，學生需要聚焦觀察並找出多邊形的共通點，即不論如何分割圖形去計算面積，都會得到相同的結果。在第二輪探究活動中，學生需要綜合不同計算面積的方法，並歸納出較方便和快捷計算多邊形面積的解題方法。透過這樣的探索活動，教師能夠讓學生經歷計算思維的訓練，從而提升她們的思維能力。學生能夠在探索中理解多邊形面積的計算方法，並進一步發展其問題解決和歸納能力。

二年級 – 除法

由於低年級學生的自主學習能力相對較低，因此在安排探索和研究活動時，教師需要先拆解活動，使學生能夠更容易聚焦探究重點。在本課堂中，教師透過探討取石遊戲的取勝法則，來強化學生對乘法和除法概念的理解。

課堂設計

在投入階段，教師向學生介紹取石遊戲的規則，並讓學生在課堂上進行遊戲。

在探索階段，教師提出問題，引導學生探究取石遊戲的必勝法則，並將問題分為不同情況進行討論。

在解釋階段，學生嘗試解釋玩取石遊戲的策略，並透過課堂討論歸納出取勝法則。

在評量階段，教師透過不同石頭數量的問題來評估學生對取勝法則的掌握情況。

學生表現

低年級學生喜歡通過遊戲來引入教學活動，並積極尋找取勝的方法。當教師提出只有 4 粒石頭的情況時，學生可以將其分為三種不同的情況進行討論，並發現不論先手如何取石頭，後手都能取勝（圖十三）。同樣，在 6 粒石頭的情況下，學生也可以推論出只要先手先取下至 2 粒，後手就會面臨 4 粒石頭，進而先手就能取勝（圖十四）。在課堂討論後，學生最終得出只要讓對手面對 4 的倍數石頭，先手就可以取勝。在評估階段，學生可以把遊戲策略應用至解決大數量石頭的問題（圖十五和圖十六），並能解釋先手或後手必勝的原因，以及應對的遊戲策略。

有 4 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，你認為「先手」還是「後手」有必勝的策略？

我認為（先手 / 後手）必勝，因為

- 當先手取 1 塊時，後手取 3 塊，（先手 / 後手）勝。
- 當先手取 2 塊時，後手取 2 塊，（先手 / 後手）勝。
- 當先手取 3 塊時，後手取 1 塊，（先手 / 後手）勝。



（圖十三）

有 6 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，你認為「先手」還是「後手」有必勝的策略？

探究小天地

利用數粒
找出答案啊！

測試 1

次序	取石者	取了	餘下
1	先手	<u>2</u> 塊	4 塊
2	後手	1 塊	3 塊
3	先手	3 塊	<u>0</u> 塊
4	後手	塊	塊

結局：（先手 / 後手）勝。

測試 2

次序	取石者	取了	餘下
1	先手	<u>2</u> 塊	4 塊
2	後手	2 塊	2 塊
3	先手	2 塊	<u>0</u> 塊
4	後手	塊	塊

結局：（先手 / 後手）勝。

💡 我認為（先手 / 後手）必勝。



（圖十四）

挑戰更多 FUN
~~4 的倍數~~

◇ 有 18 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，
 (~~先手~~ / 後手) 必勝。

◇ 有 20 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，
 (先手 / ~~後手~~) 必勝。

(圖十五)

挑戰更多 FUN
~~16 的倍數~~

◇ 有 18 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，
 (~~先手~~ / 後手) 必勝。

◇ 有 20 塊石頭，如果根據遊戲規則取石，
 (先手 / ~~後手~~) 必勝。

(圖十六)

為了發展學生的計算思維能力，教師會根據低年級學生的能力水平，在教學活動中刻意引入鷹架，使學生能夠有系統地經驗計算思維。在探討遊戲必勝法則時，教師會引導學生先考慮只有 4 粒和 6 粒石頭的情況，以幫助低年級學生將複雜問題分拆為可處理的問題。在思考過程中，學生通常會忽略實物操作的幫助，而聚焦於抽象的數字上進行探究。最終，大多數學生都能夠觀察到，只要石頭的數量是 4 的倍數，先手的玩家就必定會輸。因此，低年級學生在教師的引導下，都能夠自行進行探究活動，從而發展她們的計算思維能力。

教學反思

經過不同探索與研究的課堂，教師樂見學生在課堂上有了明顯的轉變。學生比以前更願意嘗試、觀察和思考，同時也更願意與同儕進行討論和分享，分享她們的觀察和想法。教師表示，學生的思維能力也有所提升，當面對挑戰時，學生會嘗試將問題拆解，細心觀察不同情況中的相同之處，並聚焦於有用的資訊上，以組織解決問題的方法。教師認為，學生能夠掌握這種解決問題的能力，比單純教授解難策略更具有實效性。

教師表示需要為學生創造一個探索的環境，使她們能夠自主地進行探索活動。教師認為 5E 教學模式為教師提供了一個完善的框架，可以有系統地引導學生進行探究活動。只要按照各個階段的要求來設計課堂，就可以有效地組織探索與研究的課堂。此外，教師認為每個學生都有能力進行探究，只要有足夠的機會，每個學生都可以成為成功者。在探究過程中，教師只要善用提問引導學生思考，並給予適當的回饋，便能大大提升學生的學習效能。

總結

綜合上述，探索與研究的課堂能夠有效提升學生的學習興趣，並使學生更加積極主動地發表自己的觀察和想法。透過這種教學方式，學生的「說數」能力和學習表現都得到了顯著提高。此外，5E 教學模式是一個有效的課堂設計框架，可以幫助教師設計和組織探索與研究的課堂。

計算思維是現代社會中每個人都必須具備的能力，而數學科正是培養學生計算思維的最佳科目。教師可以透過訓練學生進行解難活動，引導學生經歷拆解、找出規律、抽象化和演算過程，從而幫助學生發展計算思維能力。

參考資料：

1. 課程發展議會 (2017) 《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）》，香港：香港印務局。
2. Bybee, R. W., Taylor, A. J., Gardner, A., Scotter, P. V., Powell, J. C., Westbrook, A. & Landes, N. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins, effectiveness and applications. Executive Summary. Retrieved from https://www.bscs.org/sites/default/files/_legacy/BSCS_5E_Instructional_ModelExecutive_Summary_0.pdf.
3. Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Communications of the ACM, 49(3), P.33-35.
4. BBC Bitesize (n.d.). KS3: Introduction to computational thinking. BBC. Retrieved from <https://www.bbc.co.uk/bitesize/guides/zp92mp3/revision/1>.