

題目：透過加強縱向課程設計，提升學生四邊形概念的學習效能

講者：曾倫尊博士（教育局 小學校本課程發展組）

黃詠詩老師、蘇鈺玲老師、黎送恩老師、歐煥健老師（丹拿山循道學校）

引言

香港小學數學修訂課程（2017）全面落實，學生需要在「圖形與空間」範疇認識圖形的概念和性質及它們之間的關係。當中特別關注學生在四邊形的學習，要求學生在二年級掌握四邊形對邊和鄰邊的概念；三年級要求學生認識正方形和長方形皆為平行四邊形，若在一堆圖形中選出所有平行四邊形，當中若有正方形和長方形，它們都應被選出；四年級進一步要求學生，認識不同種類四邊形之間的關係，能夠指出所有正方形皆是長方形，所有正方形、長方形和菱形皆是平行四邊形以及所有正方形皆是菱形。

丹拿山循道學校老師認為學生在學習四邊形時，普遍都能清楚記憶圖形的特徵，可是對於各種四邊形的關係卻不理解，難於運用圖形的性質來分類，並且不能運用性質來分割或拼砌多邊形，從而協助計算多邊形的面積。歸根究柢，老師需要提升校本縱向課程的設計，加強各級課程在四邊形教學上的銜接及連貫性。在校本縱向課程設計上，老師在不同級別按照學生空間概念認知發展的層次來設計教學活動，運用 van Hiele（1986）的幾何學習模式進行教學。老師配合實作活動及各種電子學習平台輔助，並運用適當的數學語言、符號和工具，幫助學生掌握正確的概念，協助他們深入理解四邊形性質及它們之間的包含關係。

學生幾何概念的發展

歐美國家在設計幾何學習的教材時，主要根據荷蘭數學教育家 van Hiele 夫婦的幾何學習發展理論，他們認為學生的幾何概念思考模式可以分成五個發展層次，每個層次有其發展特徵。今次分享的教材設計，主要根據首三個層次的理念，現略述其特徵如下：

第零層次：視覺化 (Visualisation)

學生透過視覺觀察具體物件的外觀來辨認物件，對差異不大的圖形，他們可以透過操作辨識，並使用非標準數學語言描述圖形的形狀。例如：二年級學生對「正方形」和「長方形」的概念是根據他們自己對熟悉物件的記憶，如：門、盒子的表面等。學生對物件的描述是：「正正的、四四方方的、直直的、長長的、……；外面的線都是直直的，線都一樣」等，以不標準的數學語言來形容。學生雖然能夠辨認「正方形」或「長方形」，但並不瞭解真正定義。因此這階段的學生宜多安排操作活動，讓學生透過視覺進行分類、堆疊等活動獲得概念。

第一層次：分析 (Analysis)

學生可以從圖形的構成元素分析圖形，並且可以運用實物操作（如：幾何條製作圖形、量度圖形的邊長，在方格紙上製作圖形等）的方式，探究圖形的性質。學生具備視覺辨識的能力，能察覺到「長方形」有四條邊及四個直角，有兩條長邊，兩條短邊，對邊長度相等；「正方形」

有四條邊及四個直角，四條邊長度相等；學生能運用較為準確的數學語言描述圖形的特徵，但不能解釋特徵之間的關係。此階段的學生，宜安排製作及檢驗的活動，以掌握圖形的性質。

第二層次：非形式歸納 (Informal deduction)

學生能建立平面圖形特徵之間的關係，例如：學生能認識「長方形」是一個有直角的平行四邊形，「正方形」皆是長方形，「等邊三角形」皆是等腰三角形等的包含關係。學生能夠歸納出圖形的性質，理解非正式的定義，能為圖形分類，然而不能理解邏輯次序，不能了解證明有關幾何定理的重要性。

根據 van Hiele 研究顯示，上述三個層次有學習的次序性，老師需要確保學生掌握前一層的知識概念，才能有效進行下一層次的教學活動。一、二年級學生大都處於第零層次的視覺化期，對幾何圖形的瞭解須經過實物的觀察、操作、描述與比較，多次具體實作經驗，才能循序漸進地達到較高層次。三、四年級學生大致可達到第一層分析，五、六年級學生大致處於第一層分析至第二層非形式歸納的過渡時期，老師的教學直接影響學生層次的提升，若教導適切，可協助學生超過實際的層次。

van Hiele 提出的教學階段論

今次分享的學習活動實施流程與設計理念基礎，是參考 van Hiele 幾何思考的五個教學階段論，現闡述如下：

(一) 探詢資訊 (Inquiry / Information)：

老師需要了解學生的先備知識與經驗，適當地激發學生的動機去探究平面圖形的結構，使學生熟悉學習內容的特殊字彙，然後透過引入例子或非例子來建構基礎概念。

(二) 直接導向 (Directed Orientation)：

老師經過探詢資訊後，細心規劃具備次序性的教學活動，直接引導學生認識學習的方向，並讓學生循序漸進地探究各種幾何特徵。

(三) 解釋說明 (Explication)：

老師幫助學生正確地使用適當的數學語言表達、互相交流和討論，促進學生形成幾何概念，並學習解釋說明。

(四) 自由探索 (Free Orientation)：

老師透過較複雜或含多解的開放性任務，啟發學生自由探索與創造的能力，讓學生透過作圖、舉例、演繹、推理等不同的解題方法，經歷探索的過程，聯繫所學的幾何概念。

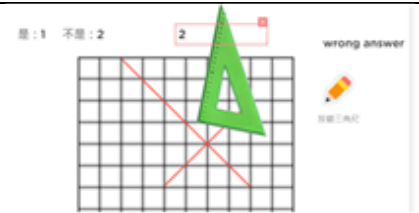
(五) 整合 (Integration)：

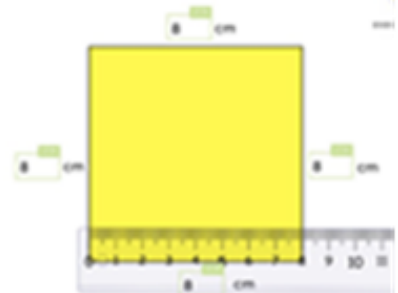
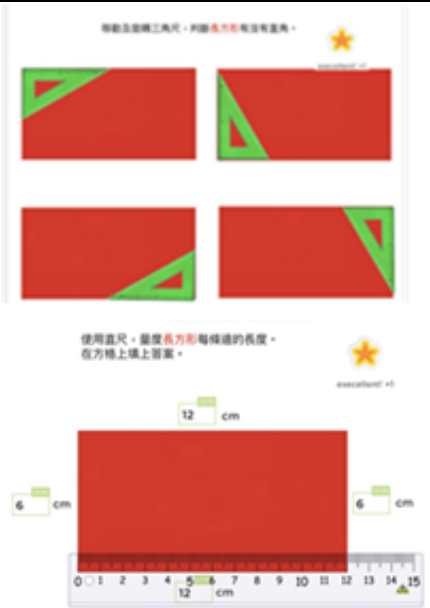
老師幫助學生將獲得的幾何概念知識，整合成一個有組織的體系，協助學生吸收、內化和統整各種幾何關係，成為新的概念架構。

van Hiele 教學階段在各級的運用

課題：二年級 2S2 角、2S4 四邊形（一）

二年級學生在第零層次的視覺化期，對幾何圖形的瞭解須經過實物的觀察、操作、描述與比較，多次具體實作經驗，才能循序漸進地達到較高層次。老師因應學生的學習難點設計相關的教學活動，現表列如下：

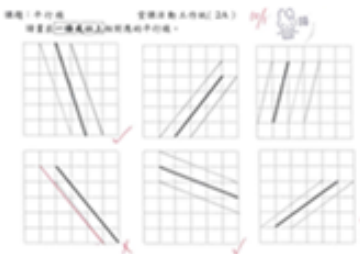
學習重點	難點分析	教學活動	學生的學習
I. 認識角的概念	由於教科書或老師展示角的時侯，角的兩邊經常都是相同長度的，以致學生會誤認為角的兩邊必須長度相等。	老師運用實作活動澄清概念。老師利用幾何條，進行實作活動，透過製作大小不同的等邊三角形，然後由學生自行發現並解釋說明角的大小與它的邊長沒有關係，學生都能夠指出角的大小並沒有改變。	
II. 認識直角和垂直線的概念	學生不懂得運用三角尺內的直角來分辨垂直線，純粹以直觀比較。	老師運用 Classkick 電子教學課件，讓學生學習能正確地擺放虛擬的三角尺及分辨垂直線。老師可以在電腦內即時觀察每位學生放置三角尺的情況，並立刻給予適當的回饋及糾正。	 老師給予學生「放錯三角尺」的貼紙提示，直到學生成功擺放三角尺。
III. 四邊形（一）	學生學習有關四邊形的對邊、鄰邊等相對的概念感到困難。	老師根據 van Hiele 提出的第一和二個教學階段，讓學生透過觀察和比較不同的四邊形，發現所有四邊形都有四條邊和四隻角，並分辨有關四邊形的對邊、鄰邊等概念。	

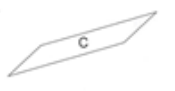
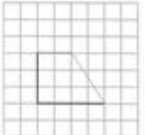
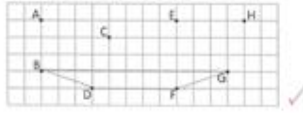
	認識正方形和長方形的概念和基本性質	老師根據 van Hiele 的第三個教學階段設計活動，讓學生利用 Classkick 電子教學課件，擺放三角尺分辨直角，指出正方形有四個直角。由於學生有正確擺放三角尺的基礎，學習活動進行得非常順暢。	
		另一活動，要求學生正確擺放直尺量度正方形邊長，再指出正方形四邊長度相等。	
		完成正方形後，讓學生指出長方形有四個直角，然後再指出長方形有兩組對邊長度相等。學生都能夠順利歸納正方形和長方形的基本性質。	

三、四年級學生大致可以達到第一層分析，學生可以從圖形的性質分析圖形，能運用準確的數學語言描述圖形的特徵，並且可以運用實物操作、製作及檢驗活動（如：幾何條製作圖形、量度圖形的邊長、在方格紙上製作圖形等）的方式，探究並掌握圖形的性質。

課題：三年級 3S1 四邊形（二）

老師因應學生的學習難點設計相關的教學活動，現表列如下：

學習重點	難點分析	教學活動	學生的學習
I. 繪畫和製作平行線	學生已掌握在釘點紙繪畫平行線，但在方格紙上繪畫平行線則表現較遜，特別在繪畫斜線方面。 學生在空格內繪畫相對應的平行線。 繪畫與橫線或沿垂線平行的線時，效果較理想。 繪畫與斜線平行的線時，部分學生較難掌握。	設計另一張方格紙讓學生繪畫平行線，主要集中在斜線上，效果理想，當然亦有小部分學生仍未能掌握。 提示學生繪畫平行線的步驟： 1. 把三角尺緊貼着直尺/（直線），形成垂直線（有直角）（小二已學） 2. 移動三角尺（左/右） 3. 沿三角尺繪畫另一條直線得出一組平行線 提示學生可轉動工作紙，使斜線轉成橫線或沿垂線，方便繪畫平行線。	 課題：平行線 當課本翻至工作紙(3A) 繪畫與一條直線(或沿直尺)平行的平行線。 1. 畫一條直線與直線 AB 互相平行。 2. 畫一條與長度不同的直線與直線 CD 互相平行。 3. 畫一條與長度不同的直線與直線 EF 互相平行。 4. 畫一條直線與直線 GH 互相平行，並穿過 P 點的線段。 5. 畫一條直線與直線 IJ 互相平行，並穿過 P 點的線段，但長度需比 IJ 短。 6. 畫一條直線與直線 KL 互相平行，並穿過 P 點的線段，但長度需比 KL 長。 7. 畫一條直線與直線 MN 互相平行，並穿過 Q 點的線段，但長度需比 MN 長。
	在空格內繪畫相對應的平行線，並通過指定的一點。 繪畫指定的兩點的平行線時，學生較難掌握，需要多加練習。	提示學生繪畫平行線的步驟 在指定的兩點上繪畫平行線時，先繪畫直線通過指定的一點，然後再繪畫對應的平行線並通過另外指定的一點。	4. 畫一條直線與直線 GH 互相平行，並穿過 P 點的線段。 5. 畫一條直線與直線 IJ 互相平行，並穿過 P 點的線段，但長度需比 IJ 短。 6. 畫一條直線與直線 KL 互相平行，並穿過 P 點的線段，但長度需比 KL 長。 7. 畫一條直線與直線 MN 互相平行，並穿過 Q 點的線段，但長度需比 MN 長。

II. 認識平行四邊形的概念和性質	有較多學生未能正確分辨圖形是否平行四邊形。	在判別圖形是否平行四邊形時，老師希望學生能運用平行四邊形的性質分辨，並解釋說明，然而部分學生只憑直觀判別，並沒有運用工具量度。	按照平行四邊形的特性，檢視並判斷以下圖形是否屬於平行四邊形。 1.  有 <u>2</u> 組對邊平行 有 <u>2</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形 2.  有 <u>1</u> 組對邊平行 有 <u>1</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形 3.  有 <u>2</u> 組對邊平行 有 <u>2</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形 4.  有 <u>2</u> 組對邊平行 有 <u>2</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形 5.  有 <u>2</u> 組對邊平行 有 <u>2</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形 6.  有 <u>1</u> 組對邊平行 有 <u>1</u> 組對邊長度相等 它 (是 / 不是) 平行四邊形
III. 認識梯形的概念和性質	繪畫和製作梯形	在方格紙、釘點紙繪畫梯形，效果理想。 任意選擇四點繪畫梯形時，部分學生有困難，甚至未能完成。 當學生初次接觸不同種類的梯形時，要多加提示「兩腰長度不相同」的「特殊梯形」。 鼓勵學生用三角尺、直尺來量度四邊形，從而比較平行四邊形、梯形的不同之處。	課題：繪畫梯形 依指示在釘點紙或方格紙上畫圖形。 5. 在釘點紙上畫出一個梯形。  6. 加畫兩條虛線，完成一個梯形。 a.  b.  7. 把下面的其中四點用直線連起來，畫出一個梯形。 

課題：四年級 4S1 四邊形（三）、4S2 圖形分割和拼砌

學生在學習四邊形（三）不同種類四邊形之間的關係時感到特別困難，老師於是依據 van Hiele 的五個學習階段來設計與引導學生學習，期望幫助學生深入認識四邊形的包含關係。老師首先借助溫氏圖作為分類推理的工具，讓學生對溫氏圖的交集、聯集及樹狀圖有所認識，較容易幫助學生認識圖形的包含性質，整理四邊形之間的異同及關係。由於學生在三年級已經學過各種類型三角形的包含關係，故適宜選用三角形作為學習分類的切入點。

老師為引起學生的學習興趣，刻意加入閱讀、繪本元素，希望透過故事形式，利用四邊形的性質去篩選各種四邊形。第一場比賽，先將各種四邊形按角進行比較，然後引導學生將有直

角的四邊形分類，得出正方形和長方形。再將它們按邊長進行比較，讓學生發現正方形除了有四邊長度相等的屬性之外，其實跟長方形一樣，都有四個直角，符合長方形定義，因此所有正方形皆是長方形。老師先示範圖形選拔的方法，將溫氏圖包裝成比賽關卡，符合指定性質要求的四邊形，才能獲得「通行證」，進入相關關卡。

第二輪比賽，將各種四邊形按邊長進行比較，引導學生將有四條邊長度相等的四邊形分類，再將選出的正方形和菱形比較異同，從而歸納出正方形皆是菱形。在活動過程中，學生需要解釋圖形進入關卡的原因，促使學生意識到圖形屬性之間的關聯，活動除訓練學生運用數學語言的能力，亦讓學生通過推理掌握四邊形包含關係概念，期望學生可以進入 van Hiele 幾何思考層次的第三層。

在兩輪比賽過後，老師要求學生運用溫氏圖總結四邊形之間的關係。最後，老師給予學生開放性問題，讓學生用自己的方法來分類各種四邊形，學生經過自由探索的過程，統整四邊形之間的關係，他們會總結三個關鍵要素，任何四邊形都可以從直角、對邊長度相等、對邊平行等基礎的特徵分類，清楚明確掌握四邊形之間分類、包含關係。

在圖形分割和拼砌的教學設計，老師先讓學生運用平行四邊形的分割、拼砌作為過渡活動，學生初步體驗圖形之間的轉化，為將來四邊形面積公式的推導埋下伏筆。學生需要將平行四邊形先分割成常規的四邊形，然後再拼砌新的圖形。在正式分割多邊形階段，老師會提示學生以盡量少的分割線為原則，分割出熟識的平面圖形。老師選用了五年級學生經常犯錯的圖形作為練習，學生需要使用工具證明判斷，藉此提示學生在進行圖形分割時，不可以單憑直觀草率地判別圖形，更加需要從四邊形性質進行判斷。

五年級 多邊形面積

在進行多邊形面積教學之前，老師首先快速地重溫所有平面圖形性質及計算面積的方法，讓學生對四年級圖形分割與拼砌有基礎的掌握，就進入 Classkick 電子學習課件。老師運用 Classkick 電子學習課件做圖形拼砌及填補，既可提升學生學習興趣，亦可銜接四年級的圖形分割與拼砌的知識到五年級的多邊形面積計算，達致知識縱向連貫。老師設計的電子學習課件大致分三部分，第一部分圖形拼砌、第二部分圖形分割、第三部分圖形填補，當中題目難度都由淺入深，分為引導題及作答題。老師發現部分學生對多邊形的敏感度不足，不能有效地分辨組成多邊形的圖形，對圖形分割的效率不足，未能有效運用圖形性質進行分割，到計算圖形面積時過於複雜，導致難以計算答案。

老師運用 van Hiele 的第一個教學階段，學生重溫簡單長方形及正方形的拼砌，然後再加入三角形的拼砌，循序漸進增加更多不同的圖形，照顧到不同能力的學生，慢慢提高學生對不同圖形性質的運用及理解，亦可提高挑戰性。拼砌完圖形之後，進入 van Hiele 的第二個教學階段，運用簡單圖形分割開始，學生慢慢加深對分割圖形後的結果及印象，希望學生掌握如何

有效地分割圖形。學生學完分割後，發現掌握圖形的性質對分割多邊形有很大幫助。在計算多邊形面積時，學生先計算方格紙上的多邊形，學生較易為圖形進行分割，較容易解釋分割的方法，之後再引入沒有背景的多邊形，學生要注意圖形上提供的數據，先嘗試不同畫線方法去分割，再思考如何計算圖形面積，因為不同的分割方法未必一定有足夠數據計算，所以學生要解釋說明。

接下來運用填補法進行多邊形面積計算。同樣地，老師首先運用 van Hiele 的第一個教學階段，檢視學生對簡單圖形填補的掌握，以銜接四年級有關圖形分割與拼砌的知識。在計算多邊形面積時，學生先計算方格紙上多邊形的面積，再引入沒有方格背景的多邊形，最後會用分割或填補方法都能計算的題目，希望學生解釋那個方法會較方便。最後老師進行開放延伸活動，學生可以運用不同種類的三角形自行拼砌不同的多邊形，先自己計算該圖形的面積，然後再考考其他學生。

總結，運用了 van Hiele 的教學階段之後，老師更加重視學生的已有知識，及以學生為中心引導學生探究新知識，另外，老師強調學生應該要多運用數學語言去解釋計算方法，可以令學生學習印象更深刻。在 Classkick 電子學習平台上，學生可以自由地在題目上面畫畫或作出更改，因此老師可以鼓勵學生不斷嘗試，利用不同方法計算多邊形面積，老師亦可以同步展示學生的解題方法及提供即時回饋，加強生生互動。

縱向課程的銜接

在縱向課程銜接方面，老師刻意在知識、技能、態度三方面，連貫二至四年級「圖形與空間」範疇的學習。在知識方面，老師在二年級嘗試運用準確的數學語言及符號，來表達角、直角、邊、線段和平行的概念，並且沿用至四年級。在技能方面，老師與時並進地在二年級引入各種電子學習平台（如：Classkick、GeoGebra），讓學生能夠熟習在平板電腦使用各個電子學習平台學習。另外，老師要求學生正確地使用量度工具（如：三角尺及直尺）來檢測、驗證和製作垂直或平行線。在態度方面，整個科組老師都認同，學生需要認真地處理「圖形與空間」範疇內的題目，學生可以運用直觀方法判斷兩線是否互相垂直或平行，然而老師會鼓勵學生進一步運用工具檢測驗證，確保其真確性，藉此培養學生的空間感和認真學習的態度。就以上三方面的課程設計，緊緊地連貫三級的教學，讓學生能夠將所學，從二年級連接到四年級，確保學生有穩固的基礎概念，再建構更高層次的學習，達致更佳的教学效果。

三級的縱向課程大約實施了三年，老師就各有關課題內的不同難點深入探討，在教學中加強電子學習以及實作活動的連繫，嘗試運用 van Hiele（1986）提出的教學層階，提醒老師編排教學活動的次序，重視學生幾何思維發展的階段，學生對基礎概念的掌握，提升學生理解的層次，鼓勵學生自由地運用多角度思考，運用數學語言及不同的方法討論解題。學生經過一連串的學習活動，能夠熟練地運用數學語言描述四邊形性質及包含關係，提高學生運用工具判斷四邊形的意識，及準確地分割及填補多邊形，才能有最好的學習效果。

參考文獻

1. Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1996). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1), 31-48.
2. Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
3. Hoffer, A. (1983). van Hiele based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.205-227). NY: Academic Press.
4. van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight——A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
5. 何敏華 (2005)。創意教學活動「四邊形的獵捕」—包含關係的推理。《科學教育月刊》，282，41-55。
6. 教育局課程發展處數學教育組 (2018)。小學數學課程闡釋 (第一學習階段)。香港：教育局。取自：
https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/EN_KS1_tc.pdf。
7. 教育局課程發展處數學教育組 (2020)。小學數學課程闡釋 (第二學習階段)。香港：教育局。取自：
https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/EN_KS2_tc.pdf。
8. 黃國綸、許慧玉 (2016)。幾何圖形例子分類對八年級國中生學習四邊形包含關係之研究。《台灣數學教師》，37(2)，50-71。
9. 課程發展議會 (2017)。數學教育學習領域課程指引補充文件：小學數學科學習內容。香港：課程發展議會。取自：
https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/pmc2017_tc.pdf。